Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs

Experimentalphysik 2

Sommersemester 2019

Aufgabenblatt 4 – Lösung

Elektromagnetische Wellen und Relativitätstheorie

Korbinian Eschbaum

Jakob Unfried

1 Addition von Geschwindigkeiten

Zeigen Sie, dass in der speziellen Relativitätstheorie zwei gleichgerichtete Geschwindigkeiten v_1 und v_2 auf folgende Weise addiert werden:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}$$

Führen Sie hierzu zwei Lorentz-Transformationen hintereinander aus und vergleichen Sie die Koeffizienten mit einer einfachen Transformation.
Was bedeutet dies für die Addition „$c + c$“? Nähern sie das Ergebnis für kleine Geschwindigkeiten $v_1, v_2 \ll c$.

Lösung:
Die Lorentz-Transformation ist gegeben über

$$ct' = \gamma_1(ct - \beta_1 x), \qquad x' = \gamma_1(x - \beta_1 ct)$$

$$\Rightarrow \qquad ct'' = \gamma_2(ct' - \beta_2 x') = \gamma_1\gamma_2(ct - \beta_1 x - \beta_2(x - \beta_1 ct)) = \gamma_1\gamma_2((1 + \beta_1\beta_2)ct - (\beta_1 + \beta_2)x) \stackrel{!}{=} \gamma(ct - \beta x)$$

$$\Rightarrow \qquad x'' = \gamma_2(x' - \beta_2 ct') = \gamma_1\gamma_2(x - \beta_1 ct - \beta_2(ct - \beta_1 x)) = \gamma_1\gamma_2((1 - \beta_1\beta_2)x - (\beta_1 + \beta_2)ct) \stackrel{!}{=} \gamma(x - \beta ct)$$

Daraus können wir schließen

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2), \qquad \gamma\beta = \gamma_1\gamma_2(\beta_1 + \beta_2)$$

$$\Rightarrow \qquad v = c\beta = c\frac{\gamma\beta}{\gamma} = c\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2}$$

Die Lichtgeschwindigkeit addiert liefert

$$v = \frac{2c}{1 + c^2/c^2} = \frac{2c}{2} = c$$

Im Falle nichtrelativistischer Geschwindigkeiten gilt

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \approx \frac{v_1 + v_2}{1} = v_1 + v_2$$

Es ergibt sich also der klassische Grenzfall.

2 Polarisation von EM Wellen

Wir betrachten zwei ebene elektromagnetische Wellen.
Das elektrische Feld der ersten ist $\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0^{(1)} \cos\left(\frac{\omega z}{c} - \omega t\right)(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)$.
Das magnetische Feld der zweiten ist $\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} B_0^{(2)} \sin\left(\frac{\omega z}{c} - \omega t + \varphi\right)(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)$.

(a) Wie sind die einzelnen Wellen polarisiert? Was sind ihre Wellenvektoren?

Lösung: Beide sind linear polarisiert. Die Polarisationen stehen senkrecht zueinander. Die Wellenvektoren sind jeweils $\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{c}\boldsymbol{e}_z$.

(b) Die beiden Wellen überlagern sich nun zu einer Welle. Was ist ihre Polarisation wenn $\varphi = 0$? Wenn $\varphi = \pi$?

Lösung: Es gilt

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{\omega}\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}) = \frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}) - \frac{1}{\omega}k^2\boldsymbol{E} = -\frac{k^2}{\omega}\boldsymbol{E} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{E} = \frac{\omega}{k^2}\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{k}$$

Demnach gilt für das zweite elektrische Feld

$$\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\omega}{k}\frac{B_0^{(2)}}{\sqrt{2}} \sin(kz - \omega t + \varphi)(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y) \times \boldsymbol{e}_z = c\frac{B_0^{(2)}}{\sqrt{2}} \sin(kz - \omega t + \varphi)(\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y)$$

Dann ist im Falle einer Überlagerung die resultierende Welle

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} E_0^{(1)} \sin(kz - \omega t + \pi/2)(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y) + \frac{1}{\sqrt{2}} c B_0^{(2)} \sin(kz - \omega t - \varphi)(\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}[E_0^{(1)} \sin(kz - \omega t + \pi/2) + cB_0^{(2)} \sin(kz - \omega t + \varphi)]\boldsymbol{e}_x \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}[E_0^{(1)} \sin(kz - \omega t + \pi/2) - cB_0^{(2)} \sin(kz - \omega t + \varphi)]\boldsymbol{e}_y
\end{aligned}$$

In beiden Fällen ist die Welle elliptisch polarisiert. Ist $\varphi = 0$, so ist sie rechtshändig. Ist $\varphi = \pi$, so ist sie linkshändig. Falls auch die Beträge $E_0^{(1)}$ und $cB_0^{(2)}$ gleich sind, ist sie zirkular polarisiert.

(c) Was ist die Polarisation der entstehenden Welle für $\varphi = \pi/2$? Für andere φ?

Lösung: Wenn $\varphi = \pi/2$, können wir den zeitabhängigen Teil aus dem Vektorteil ausklammern. Die Welle ist linear polarisiert. Für alle anderen φ ist die Welle elliptisch polarisiert.

(d) Was müsste für unpolarisierte Strahlung geschehen?

Lösung: Man müsste viele Wellen überlagern, die unterschiedliche Amplituden und Phasen haben. Erst dann ist die Bahn die von $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r_0}, t)$ an einem fixen Ort $\boldsymbol{r}_0$ mit der Zeit in der xy-Ebene vollführt wird eine Form, die komplizierter ist, als eine Linie, Ellipse oder ein Kreis.

3 Relativistische Züge

Wir betrachten zwei Züge 1 und 2 sowie einen Bahnhof B. Die Züge fahren beide in die gleiche Richtung auf einer Strecke die sich relativ zum Bahnhof nicht bewegt und eine Länge von L hat. Der Bahnhof beobachtet dass der erste Zug die Strecke in einer Zeit $\frac{5L}{4c}$ zurücklegt, der zweite in $\frac{5L}{3c}$.

(a) Sie werden einige Längen, Geschwindigkeiten und Zeiten verwenden. Überlegen Sie sich eine konsistente Notation, aus der man erkennt, worauf sich z.B. eine Zeit bezieht und in welchem Bezugssystem sie gemessen wird.

Lösung: In dieser Musterlösung ist z.B. $t_i^{(S)}$ die Zeit die Zug i benötigt, gemessen im Bezugssystem S.

(b) Welche Geschwindigkeiten haben die Züge im Bezugssystem des Bahnhofs?

Lösung:

$$v_1^{(B)} = \frac{L^{(B)}}{t_1^{(B)}} = \frac{4}{5}c$$

$$v_2^{(B)} = \frac{L^{(B)}}{t_2^{(B)}} = \frac{3}{5}c$$

(c) Was erwarten Sie für die Geschwindigkeit des Bahnhofs im Bezugssystem von Zug 1? Wie lang ist die Strecke im Bezugssystem von Zug 1? In Bezugssystem 1, wie lange dauert es, bis das Ende der Strecke beim Zug angekommen ist? Wie schnell ist also der Bahnhof im Bezugssystem von Zug 1?

Lösung: Wir erwarten, dass die Geschwindigkeit die gleiche ist, nur in die entgegengesetzte Richtung. Betragsmäßig gilt also

$$v_1^{(B)} = v_B^{(1)}$$

Für die Länge der Strecke und die Dauer der Fahrt können wir die Formeln für die Zeitdillatation und Längenkontraktion verwenden. Wir berechnen zunächst den Gammafaktor für die Relativbewegung von Zug 1 und Bahnhof

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{v_1^{(B)}}{c}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{16}{25}}} = \frac{5}{3}$$

Da die Strecke im Bahnhofssystem ruht, ist sie im System 1 kontrahiert.

$$L^{(1)} = \frac{1}{\gamma_1} L^{(B)} = \frac{3}{5} L$$

Die Messung der Fahrzeit findet im System von Zug 1 am gleichen Ort statt, also ist die im Bahnhofssystem dillatiert.

$$t_1^{(B)} = \gamma_1 t_1^{(1)} \quad \Rightarrow \quad t_1^{(1)} = \frac{3L}{4c}$$

Damit erhalten wir wie erwartet

$$v_B^{(1)} = \frac{L^{(1)}}{t_1^{(1)}} = \frac{4}{5}c$$

(d) Wie lang ist die Strecke im Bezugssystem von Zug 2? Wie lange braucht die Strecke im Bezugssystem von Zug 2, um an ihm vorbeizufahren?

Lösung: Dies ist analog zu (c):

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{5}{4} \\ L^{(2)} &= \frac{1}{\gamma_2} L^{(B)} = \frac{4}{5} L \\ t_2^{(2)} &= \frac{1}{\gamma_2} t_2^{(B)} = \frac{4L}{3c} \end{aligned}$$

Und wir sehen dass auch hier die Geschwindigkeit die gleiche ist.

(e) Im Bezugssystem von Zug 2, wie lange braucht Zug 1 für die Strecke? Wie schnell ist also Zug 1 im Bezugssystem 2?

Lösung: Hier könnnen wir nicht einfach Formeln für Zeitdillatation verwenden. (Mehr dazu in (f)). Hier müssen wir eine explizite Lorentztransformation vom System B ins System 2 durchführen. Zug 1 starte seine Fahrt bei $x_i^{(B)} = 0$ zum Zeitpunkt $t_i^{(B)} = 0$. Er kommt am Ende der Strecke $x_f^{(B)} = L$ zum Zeitpunkt $t_f^{(B)} = \frac{5L}{4c}$ an. Diese Raumzeitkoordinaten Transformieren wir ins System 2:

$$\begin{aligned} x_i^{(2)} &= \gamma_2 \left(x_i^{(B)} - v_2 t_i^{(B)} \right) = 0 \\ t_i^{(2)} &= \gamma_2 \left(t_i^{(B)} - v_2 \frac{x_i^{(B)}}{c^2} \right) = 0 \\ x_f^{(2)} &= \gamma_2 \left(x_f^{(B)} - v_2 t_f^{(B)} \right) = \frac{5}{4} \left(L - \frac{3}{5} c \frac{5L}{4c} \right) = \frac{5}{16} L \\ t_f^{(2)} &= \gamma_2 \left(t_f^{(B)} - v_2 \frac{x_f^{(B)}}{c^2} \right) = \frac{5}{4} \left(\frac{5L}{4c} - \frac{3}{5} c \frac{L}{c^2} \right) = \frac{5}{4} \frac{13}{20} \frac{L}{c} = \frac{13L}{16c} \end{aligned}$$

Wir erhalten also eine Geschwindigkeit des Zugs 1 im Bezugssystem 2

$$v_1^{(2)} = \frac{x_f^{(2)} - x_i^{(2)}}{t_f^{(2)} - t_i^{(2)}} = \frac{5}{16} c$$

(f) Vergleichen Sie ihr Ergebnis aus (e) mit den anderen Kursteilnehmern. Sollten Sie sich uneinig sein, finden Sie heraus, wer wo eine falsche Annahme gemacht hat.

Lösung: Ein häufiger Fehler, der hier z.B. zur Sprache kommen könnte ist, fälschlicherweise die Formeln für Zeitdillatation oder Längenkontraktion zu verwenden.

Die Formel für Zeitdillatation gilt nur, wenn die Zeit in einem der beiden Systeme *am selben Ort* gemessen wird.

Die Formel für Längenkontraktion gilt nur, wenn die Länge in einem der beiden Systeme *zur selben Zeit* gemessen wird.

4 Polarisation von EM Wellen

Eine ebene elektromagnetische Welle der Intensität I und Wellenlänge λ breite sich in die positive z-Richtung aus.

(a) Die Welle sei zirkular polarisiert. Am Ursprung $\boldsymbol{r} = 0$ zeigt das elektrische Feld zum Zeitpunkt $t = 0$ in die positive x-Richtung. Am selben Ort zeigt das magnetische Feld zum Zeitpunkt $t = \frac{\lambda}{4c}$ in die negative x-Richtung. Geben sie zu allen Zeiten und an allen Orten das elektrische und magnetische Feld, so wie den Poynting Vektor an.

Lösung: Zunächst entspricht die zweite angegebene Zeit einer Viertel Periode

$$\frac{\lambda}{4c} = \frac{1}{4f} = \frac{\pi}{2\omega}$$

Es ist $\boldsymbol{B} = \frac{1}{\omega}(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E})$. Also zeigt das magnetische Feld zuerst in die negative y-Richtung und nach einer Viertel Periode in die positive x-Richtung. Die Welle ist also rechtshändig zirkular polarisiert (Wenn $\boldsymbol{k}$ der Daumen ist, folgt die Drehrichtung den Fingern der *rechten* Hand, nicht der linken).
Der Wellenvektor ist $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{e}_z := \frac{2\pi}{\lambda}\boldsymbol{e}_z$, die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\frac{c}{\lambda}$. Die Beträge der Felder erhalten wir aus der Intensität

$$E_0 := \sqrt{\frac{I}{c\varepsilon_0}} \qquad B_0 := \frac{E_0}{c}$$

Damit ist die Welle vollständig bestimmt:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = E_0(\cos(\omega t - kz)\boldsymbol{e}_x + \sin(\omega t - kz)\boldsymbol{e}_y)$$
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = B_0(\sin(\omega t - kz)\boldsymbol{e}_x - \cos(\omega t - kz)\boldsymbol{e}_y)$$

Der Poynting Vektor ist

$$\boldsymbol{S} = \varepsilon_0 c^2 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \varepsilon_0 c^2 E_0 B_0 \boldsymbol{e}_z = I\boldsymbol{e}_z$$

(b) Die Welle sei linear polarisiert. Am Ursprung $\boldsymbol{r} = 0$ zeigt das elektrische Feld zum Zeitpunkt $t = 0$ in die positive y-Richtung. Am selben Ort verschwindet das magnetische Feld zum Zeitpunkt $t = \frac{c}{4\lambda}$. Geben sie zu allen Zeiten und an allen Orten das elektrische und magnetische Feld an.

Lösung: Da nach einer Viertel Periode die Felder verschwinden, sind sie zu $t = 0$ maximal. Bei linearer Polarisation schwingen die Felder in jeweils einer Ebene (yz-Ebene für das elektrische Feld, xz-Ebene für das magnetische)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\boldsymbol{e}_y$$
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = -B_0 \cos(\omega t - kz)\boldsymbol{e}_x$$

5 Das Garagen-Paradoxon

Während des Semesters haben Sie das „Garagen-Paradoxon" kennengelernt. Wir wollen dieses Paradoxon nun nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ verstehen. Der Übersicht halber bezeichnen wir hier alle Größen im Ruhesystem der Leiter mit „$'$".

Eine Garage mit zwei Türen habe die Länge h in ihrem Ruhesystem. Eine Leiter hat in ihrem Ruhesystem die Länge $l' = 5/4\ h$. Sie bewege sich mit Geschwindigkeit v auf die Garage zu. Zu dem Zeitpunkt, in dem das vordere Ende der Leiter die Garage berührt, öffnen sich beide Türen. Sobald das hintere Ende die Eingangstür passiert hat, schließen sie sich wieder. Dasselbe passiert am Ausgang: Sobald das vordere Ende der Leiter am Ausgang ist, öffnen sich beide Türen und sobald das hintere Ende der Leiter die Ausgangstür passiert hat, schließen sie sich wieder.

Aus Sicht des Beobachters (Ruhesystem der Garage) erscheint die Leiter kontrahiert und sie passt in die Garage, d.h. es existiert ein Zeitintervall Δt, zu dem beide Türen geschlossen sind. Aus Sicht der Leiter erscheint die Garage kontrahiert und die Leiter passt nicht in die Garage. Das Zeitintervall, in dem beide Türen geschlossen sind, scheint es hier also nicht zu geben. Scheinbar werden aus jedem Bezugssystem unterschiedliche Vorgänge beobachtet.

(a) Aus welchem Grund kann hier nicht einfach die Formel zur Zeitdillatation benutzt werden, um $\Delta t'$ im Leitersystem zu erhalten?

Lösung:

Die Zeitdillatationsformel funktioniert nur, wenn eine Zeitspanne zwischen zwei Ereignissen gemessen werden soll, die sich am *selben Ort* befinden. Die beiden Türen öffnen sich aber in keinem der beiden Bezugssysteme am selben Ort.

(b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Leiter, die notwendig ist, damit das Zeitintervall $\Delta t > 0$ ist.
Errechnen Sie dann Δt in Abhängigkeit von v, l' und h.

Lösung:

Damit $\Delta t > 0$ ist, muss im Ruhesystem der Garage gelten $l < h$.

$$h > l = \frac{l'}{\gamma} = l'\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{h}{l'}\right)^2 > 1-\left(\frac{v}{c}\right)^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad v > c\sqrt{1-\left(\frac{h}{l'}\right)^2} = \frac{3}{5}c$$

Wir betrachten nun das Geschehen im Ruhesystem der Garage. Zu dem Zeitpunkt, an dem sich die hintere Tür schließt, hat das vordere Ende der Leiter von der anderen Tür den Abstand $d = h - l = h - l'/\gamma$. Also benötigt sie folgende Zeit, um zur anderen Tür zu gelangen:

$$\Delta t = \frac{d}{v} = \frac{h - l'/\gamma}{v} = \frac{h - l'\sqrt{1-(v/c)^2}}{v}$$

(c) Das Paradoxon kann gelöst werden, indem man beachtet, dass keine universelle Gleichzeitigkeit vorliegt und sich die Türen demnach im Ruhesystem der Leiter nicht gleichzeitig öffnen und schließen. Das wollen wir nun überprüfen. Wir nehmen hierzu an, dass sich die erste Garagentür zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ öffnet. Berechnen Sie nun in beiden Bezugssystemen die Zeitpunkte

- $t_1(')$, an dem sich die zweite Garagentür öffnet,
- $t_2(')$, an dem sich die erste Garagentür schließt,
- $t_3(')$, an dem sich die zweite Garagentür schließt,
- $t_4(')$, an dem sich die erste Garagentür wieder öffnet, und
- $t_5(')$, an dem sich die zweite Garagentür wieder öffnet.

Hinweis: Berechnen Sie die Zeiten zunächst im Ruhesystem der Garage und benutzen Sie anschließend die Lorentz-Transformation, um die gestrichenen Zeitpunkte auszurechnen.

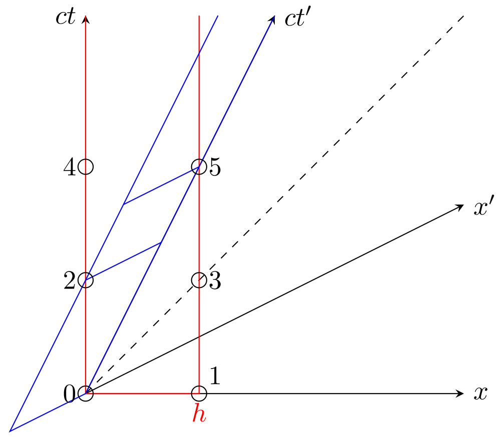
Lösung:

		Garage	Leiter	
0)	1. Tür öffnet	$t_0 = 0$		$t'_0 = 0$
1)	2. Tür öffnet	$t_1 = 0$	$ct'_1 = -\gamma\beta h$	$t'_1 = -\gamma\frac{v}{c^2}h$
2)	1. Tür schließt	$t_2 = \frac{l}{v}$	$ct'_2 = \gamma\frac{cl}{v}$	$t'_2 = \gamma\frac{l}{v}$
3)	2. Tür schließt	$t_3 = \frac{l}{v}$	$ct'_3 = \gamma\left(\frac{cl}{v} - \beta h\right)$	$t'_3 = \gamma\left(\frac{l}{v} - \frac{vh}{c^2}\right)$
4)	1. Tür öffnet	$t_4 = \frac{h}{v}$	$ct'_4 = \gamma\frac{ch}{v}$	$t'_4 = \gamma\frac{h}{v}$
5)	2. Tür öffnet	$t_5 = \frac{h}{v}$	$ct'_5 = \gamma\left(\frac{ch}{v} - \beta h\right) = \frac{\gamma ch}{v}(1-\beta^2)$	$t'_5 = \frac{h}{\gamma v}$

(d) Visualisieren Sie den Prozess in einem Minkowski-Diagramm. Zeichnen Sie auch die eben errechneten Ereignisse 0 bis 5 ein.

Lösung:

Die roten Linien zeigen die Weltlinien der Garage und die blauen Linien die Weltlinien der Leiter.



6 Wellengleichung für das magnetische Feld

(a) Nennen Sie die zeitabhängigen Maxwellgleichungen. Erklären sie anschaulich die zeitabhängigen Terme.

Lösung: Die Mawellgleichungen lauten

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} &= 0\\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} &= \mu_0\boldsymbol{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Ein zeitlich veränderliches Magnetfeld erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld (Denken sie an die Induktion). Ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld, erzeugt (genau wie statische Ströme) ein magnetisches Wirbelfeld. Stichwort: Verschiebungsstrom.

(b) In der Vorlesung haben sie gesehen, dass man aus den Maxwellgleichungen eine Wellengleichung für das elektrische Feld erhält: $\nabla^2\boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} = 0$, wobei $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Leiten Sie analog eine (partielle) Differentialgleichung zweiter Ordnung für das magnetische Feld her.

Lösung: Wir gehen davon aus, dass wir uns im quellfreien Vakuum befinden, also $\boldsymbol{j} = 0 = \rho$. Wir bilden die Rotation der vierten Gleichung und verwenden danach die zweite

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \mu_0\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\mu_0\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{B} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{B}$$

Außerdem gilt wegen $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0$, und unter Verwendung von Nabla-Identitäten

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}) - \nabla^2\boldsymbol{B} = -\nabla^2\boldsymbol{B}$$

Also insgesamt

$$0 = \nabla^2\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{B}$$