Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs

Experimentalphysik 2

Sommersemester 2019

Aufgabenblatt 4

Elektromagnetische Wellen und Relativitätstheorie

Korbinian Eschbaum

Jakob Unfried

1 Addition von Geschwindigkeiten

Zeigen Sie, dass in der speziellen Relativitätstheorie zwei gleichgerichtete Geschwindigkeiten v_1 und v_2 auf folgende Weise addiert werden:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}$$

Führen Sie hierzu zwei Lorentz-Transformationen hintereinander aus und vergleichen Sie die Koeffizienten mit einer einfachen Transformation.
Was bedeutet dies für die Addition „$c + c$"? Nähern sie das Ergebnis für kleine Geschwindigkeiten $v_1, v_2 \ll c$.

2 Polarisation von EM Wellen

Wir betrachten zwei ebene elektromagnetische Wellen.
Das elektrische Feld der ersten ist $\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0^{(1)} \cos\left(\frac{\omega z}{c} - \omega t\right)(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$.
Das magnetische Feld der zweiten ist $\vec{B}_2(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} B_0^{(2)} \sin\left(\frac{\omega z}{c} - \omega t + \varphi\right)(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$.

(a) Wie sind die einzelnen Wellen polarisiert? Was sind ihre Wellenvektoren?

(b) Die beiden Wellen überlagern sich nun zu einer Welle. Was ist ihre Polarisation wenn $\varphi = 0$? Wenn $\varphi = \pi$?

(c) Was ist die Polarisation der entstehenden Welle für $\varphi = \pi/2$? Für andere φ ?

(d) Was müsste für unpolarisierte Strahlung geschehen?

3 Relativistische Züge

Wir betrachten zwei Züge 1 und 2 sowie einen Bahnhof B. Die Züge fahren beide in die gleiche Richtung auf einer Strecke die sich relativ zum Bahnhof nicht bewegt und eine Länge von L hat. Der Bahnhof beobachtet dass der erste Zug die Strecke in einer Zeit $\frac{5L}{4c}$ zurücklegt, der zweite in $\frac{5L}{3c}$.

(a) Sie werden einige Längen, Geschwindigkeiten und Zeiten verwenden. Überlegen Sie sich eine konsistente Notation, aus der man erkennt, worauf sich z.B. eine Zeit bezieht und in welchem Bezugssystem sie gemessen wird.

(b) Welche Geschwindigkeiten haben die Züge im Bezugssystem des Bahnhofs?

(c) Was erwarten Sie für die Geschwindigkeit des Bahnhofs im Bezugssystem von Zug 1? Wie lang ist die Strecke im Bezugssystem von Zug 1? In Bezugssystem 1, wie lange dauert es, bis das Ende der Strecke beim Zug angekommen ist? Wie schnell ist also der Bahnhof im Bezugssystem von Zug 1?

(d) Wie lang ist die Strecke im Bezugssystem von Zug 2? Wie lange braucht die Strecke im Bezugssystem von Zug 2, um an ihm vorbeizufahren?

(e) Im Bezugssystem von Zug 2, wie lange braucht Zug 1 für die Strecke? Wie schnell ist also Zug 1 im Bezugssystem 2?

(f) Vergleichen Sie ihr Ergebnis aus (e) mit den anderen Kursteilnehmern. Sollten Sie sich uneinig sein, finden Sie heraus, wer wo eine falsche Annahme gemacht hat.

4 Polarisation von EM Wellen

Eine ebene elektromagnetische Welle der Intensität I und Wellenlänge λ breite sich in die positive z-Richtung aus.

(a) Die Welle sei zirkular polarisiert. Am Ursprung $\vec{r} = 0$ zeigt das elektrische Feld zum Zeitpunkt $t = 0$ in die positive x-Richtung. Am selben Ort zeigt das magnetische Feld zum Zeitpunkt $t = \frac{\lambda}{4c}$ in die negative x-Richtung. Geben sie zu allen Zeiten und an allen Orten das elektrische und magnetische Feld, so wie den Poynting Vektor an.

(b) Die Welle sei linear polarisiert. Am Ursprung $\vec{r} = 0$ zeigt das elektrische Feld zum Zeitpunkt $t = 0$ in die positive y-Richtung. Am selben Ort verschwindet das magnetische Feld zum Zeitpunkt $t = \frac{c}{4\lambda}$. Geben sie zu allen Zeiten und an allen Orten das elektrische und magnetische Feld an.

5 Das Garagen-Paradoxon

Während des Semesters haben Sie das „Garagen-Paradoxon" kennengelernt. Wir wollen dieses Paradoxon nun nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ verstehen. Der Übersicht halber bezeichnen wir hier alle Größen im Ruhesystem der Leiter mit „$'$".

Eine Garage mit zwei Türen habe die Länge h in ihrem Ruhesystem. Eine Leiter hat in ihrem Ruhesystem die Länge $l' = 5/4\ h$. Sie bewege sich mit Geschwindigkeit v auf die Garage zu. Zu dem Zeitpunkt, in dem das vordere Ende der Leiter die Garage berührt, öffnen sich beide Türen. Sobald das hintere Ende die Eingangstür passiert hat, schließen sie sich wieder. Dasselbe passiert am Ausgang: Sobald das vordere Ende der Leiter am Ausgang ist, öffnen sich beide Türen und sobald das hintere Ende der Leiter die Ausgangstür passiert hat, schließen sie sich wieder.

Aus Sicht des Beobachters (Ruhesystem der Garage) erscheint die Leiter kontrahiert und sie passt in die Garage, d.h. es existiert ein Zeitintervall Δt, zu dem beide Türen geschlossen sind. Aus Sicht der Leiter erscheint die Garage kontrahiert und die Leiter passt nicht in die Garage. Das Zeitintervall, in dem beide Türen geschlossen sind, scheint es hier also nicht zu geben. Scheinbar werden aus jedem Bezugssystem unterschiedliche Vorgänge beobachtet.

(a) Aus welchem Grund kann hier nicht einfach die Formel zur Zeitdillatation benutzt werden, um $\Delta t'$ im Leitersystem zu erhalten?

(b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Leiter, die notwendig ist, damit das Zeitintervall $\Delta t > 0$ ist. Errechnen Sie dann Δt in Abhängigkeit von v, l' und h.

(c) Das Paradoxon kann gelöst werden, indem man beachtet, dass keine universelle Gleichzeitigkeit vorliegt und sich die Türen demnach im Ruhesystem der Leiter nicht gleichzeitig öffnen und schließen. Das wollen wir nun überprüfen. Wir nehmen hierzu an, dass sich die erste Garagentür zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ öffnet. Berechnen Sie nun in beiden Bezugssystemen die Zeitpunkte

- $t_1(')$, an dem sich die zweite Garagentür öffnet,
- $t_2(')$, an dem sich die erste Garagentür schließt,
- $t_3(')$, an dem sich die zweite Garagentür schließt,
- $t_4(')$, an dem sich die erste Garagentür wieder öffnet, und
- $t_5(')$, an dem sich die zweite Garagentür wieder öffnet.

Hinweis: Berechnen Sie die Zeiten zunächst im Ruhesystem der Garage und benutzen Sie anschließend die Lorentz-Transformation, um die gestrichenen Zeitpunkte auszurechnen.

(d) Visualisieren Sie den Prozess in einem Minkowski-Diagramm. Zeichnen Sie auch die eben errechneten Ereignisse 0 bis 5 ein.

6 Wellengleichung für das magnetische Feld

(a) Nennen Sie die zeitabhängigen Maxwellgleichungen. Erklären sie anschaulich die zeitabhängigen Terme.

(b) In der Vorlesung haben sie gesehen, dass man aus den Maxwellgleichungen eine Wellengleichung für das elektrische Feld erhält: $\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0$, wobei $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Leiten Sie analog eine (partielle) Differentialgleichung zweiter Ordnung für das magnetische Feld her.