Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs

Experimentalphysik 2

Sommersemester 2019

Aufgabenblatt 3 – Lösung

Zeitlich veränderliche Felder und Wechselstromkreise

Korbinian Eschbaum

Jakob Unfried

1 Regel von Lenz

Betrachten Sie eine quadratische Leiterschleife mit Seitenlänge L, die mit Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_x$ in ein homogenes Magnetfeld $\boldsymbol{B} = -B\boldsymbol{e}_z$ eingeführt wird. Der Leiter habe eine Querschnittsfläche von A und die Elektronendichte n sowie die elektrische Leitfähigkeit σ.

(a) Berechnen Sie die Lorentzkraft, die auf die Elektronen ausgeübt wird, und den unmittelbar daraus resultierenden Strom I, der zu messen ist, sobald die Elektronen sich parallel zum Leiter bewegen.

Lösung:
Die Lorentzkraft berechnet sich über

$$\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = evB\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_z = -evB\boldsymbol{e}_y$$

Wir können uns also effektiv ein elektrisches Feld $\boldsymbol{E} = vB\boldsymbol{e}_y$ vorstellen und das Ohm'sche Gesetz anwenden.

$$I = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A} = \sigma vBA$$

(b) Berechnen Sie daraus die Gesamtkraft, die auf den Leiter wirkt. Überlegen Sie sich auch die Orientierung der Induktionsspannung im Leiter.

Lösung:

$$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B} = -ILB\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = -ILB\boldsymbol{e}_x = -\sigma vALB\boldsymbol{e}_x = -\sigma vVB\boldsymbol{e}_x$$

Nachdem der Strom in positive y-Richtung fließt, bildet sich am oberen Ende des Leiters eine positive und am unteren Ende eine negative Ladung aus. Das zugehörige elektrische Feld ist also antiparallel zu $\boldsymbol{e}_y$. Demnach ist die Induktionsspannung

$$U_{\text{ind}} = \int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} < 0$$

(c) Berechnen Sie die Induktionsspannung mit Hilfe des magnetischen Flusses als Funktion der Zeit bis zu dem Punkt, in dem sich die Leiterschleife vollständig im Magnetfeld befindet.

Lösung:

$$U_{\text{ind}}(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} BLvt = -BLv$$

(d) Vergleichen Sie die Vorzeichen der Induktionsspannungen, die Sie in (b) und (c) erhalten haben, miteinander. Stimmen sie überein?

Lösung:
Beide Induktionsspannungen sind negativ.

2 Induktion bei inhomogenem Magnetfeld

Betrachten Sie ein Magnetfeld $\boldsymbol{B}(x,y,z) = -B(x)\boldsymbol{e}_z$ und eine Leiterschleife in der xy-Ebene, deren linker Rand bei $t = 0$ bei $x = 0$ liegt. Die Leiterschleife wird nun mit Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_x$ bewegt.

(a) Berechnen Sie die induzierte Spannung als Funktion der Zeit für eine quadratische Leiterschleife mit Seitenlänge a, deren Seiten parallel zu den Koordinatenachsen liegen.

Lösung: Wir berechnen den magnetischen Fluss. Der linke Rand der Schleife ist bei $x = vt$, der rechte bei $x = a + vt$.

$$\Phi(t) = \iint \mathrm{d}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \iint \mathrm{d}A\ (-B(x)) = -\int\limits_0^a \mathrm{d}y \int\limits_{vt}^{a+vt} \mathrm{d}x\ B(x) = -a \int\limits_{vt}^{a+vt} \mathrm{d}x\ B(x)$$

Wir nehmen an, wir hätten eine Stammfunktion $F(x)$ mit $F'(x) = B(x)$.

$$\Phi(t) = -a[F(a+vt) - F(vt)]$$
$$U_{\mathrm{ind}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t) = a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[F(a+vt) - F(vt)] = av[B(a+vt) - B(vt)]$$

(b) Berechnen Sie die induzierte Spannung als Funktion der Zeit für eine kreisförmige Schleife mit Radius R. Es soll ein Integralausdruck bestimmt werden, dessen Lösung oder Vereinfachung hier nicht nötig ist.

Lösung:

Der Mittelpunkt des Schleife ist bei $x = R + vt$, auf der Schleife gilt also (Satz des Pythagoras) $(x - R - vt)^2 + y^2 = R^2$. Daraus erhalten wir die Grenzen für das y-Integral. Innerhalb der Schleife gilt

$$-y_{\max}(x,t) < y < y_{\max}(x) \qquad \text{mit} \quad y_{\max}(x,t) := \sqrt{R^2 - (x - R - vt)^2}$$

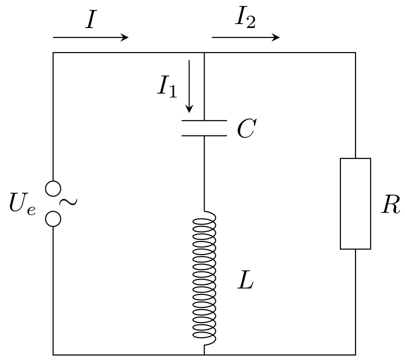
Also können wir einen Integralausdruck für die Induktionsspannung aufstellen

$$\Phi(t) = \iint \mathrm{d}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = -\iint \mathrm{d}A\ (-B(x)) = -\int\limits_{vt}^{R+vt} \mathrm{d}x \int\limits_{-y_{\max}(x,t)}^{y_{\max}(x,t)} \mathrm{d}y\ B(x) = -2\int\limits_{vt}^{R+vt} \mathrm{d}x\ y_{\max}(x,t)B(x)$$

Dieser Ausdruck lässt sich prinzipiell weiter vereinfachen, dies wollen wir hier aber nicht tun.

3 Wechselstromkreise

Betrachten Sie folgenden Stromkreis:



Die angelegte Spannung betrage $U_e(t) = U_0 \cos(\omega t)$.
Berechnen Sie die einzelnen Ströme I, I_1 und I_2, sowie die Spannung am Kondensator U_C und die an der Spule U_L. Nehmen Sie hierfür an, dass $\omega > 1/\sqrt{LC}$. Vernachlässigen Sie Eigenschwingungen.

Lösung:
Die Impedanzen der Bauteile sind

$$Z_C = -\mathrm{i}\frac{1}{\omega C} \qquad Z_L = \mathrm{i}\omega L \qquad Z_R = R$$

Wir rechnen im folgenden mit komplexen Spannungen und Strömen. $U_e(t) = U_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. Aus der Knotenregel erhalten wir $I(t) = I_1(t) + I_2(t)$.
Die Maschenregeln für die linke und die große Masche

$$U_e(t) = U_C(t) + U_L(t) = Z_C I_1(t) + Z_L I_1(t) \Rightarrow \quad I_1(t) = \frac{U_e(t)}{Z_C + Z_L} = \mathrm{i}\frac{\omega C}{1-\omega^2 LC} U_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$
$$U_e(t) = U_R(t) = Z_R I_2(t) \Rightarrow \quad I_2(t) = \frac{U_e(t)}{Z_R} = \frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

Die physikalisch messbaren Ströme sind die Realteile

$$\mathrm{Re}\,[I_1(t)] = -U_0 \frac{\omega C}{1-\omega^2 LC}\sin(\omega t)$$
$$\mathrm{Re}\,[I_2(t)] = \frac{U_0}{R}\cos(\omega t)$$
$$\mathrm{Re}\,[I(t)] = \mathrm{Re}\,[I_1(t) + I_2(t)] = \frac{U_0}{R}\cos(\omega t) - U_0 \frac{\omega C}{1-\omega^2 LC}\sin(\omega t)$$

Die Spannungen

$$\mathrm{Re}\,[U_C(t)] = \mathrm{Re}\,[Z_C I_1(t)] = \mathrm{Re}\left[\frac{Z_C}{Z_C + Z_L}U_e(t)\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{1-\omega^2 LC}U_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right] = \frac{1}{1-\omega^2 LC}U_0\cos(\omega t)$$
$$\mathrm{Re}\,[U_L(t)] = \mathrm{Re}\,[Z_L I_1(t)] = \mathrm{Re}\left[\frac{Z_L}{Z_C + Z_L}U_e(t)\right] = \mathrm{Re}\left[-\frac{\omega^2 LC}{1-\omega^2 LC}U_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right] = -\frac{\omega^2 LC}{1-\omega^2 LC}U_0\cos(\omega t)$$

4 Magnet fällt durch ein Rohr

Wenn ein Permanentmagnet durch ein zylindrisches Rohr aus leitendem Material fällt, so ist die Dauer des Falls anders, als bei einem nicht leitendem, aber ansonsten baugleichem Rohr.

(a) Nach welchem Grundsatz können Sie ohne Rechnung oder längliche Argumentation entscheiden, in welchem Rohr der Fall länger dauert? Welches ist es?

Lösung: Der Magnet wird im leitenden Rohr irgendwelche Ströme induzieren, die widerum Magnetfelder erzeugen und so eine Kraft auf den Magneten ausüben. Nach Lenz'scher Regel muss diese der Ursache (dem Fallen des Magneten) entgegen wirken, bremst ihn also. Der Fall dauert im leitenden Rohr also länger.

(b) Skizzieren Sie die Situation mit leitendem Rohr. Lesen Sie zunächst den Rest der Aufgabe, um abzuschätzen, was noch alles eingezeichnet werden soll. Zum leichteren Vergleich mit der Musterlösung falle der Magnet mit dem Südpol nach unten.

Lösung: Skizze siehe unten.
Die Feldlinien laufen außerhalb des Magneten von Nord nach Süd und innerhalb von Süd nach Nord.

(c) Stellen Sie sich einen Querschnitt des Rohrs ein gutes Stück oberhalb des Magneten als Leiterschleife vor. Wenn sich der Magnet nach unten bewegt, ändert er den magnetischen Fluss durch die Leiterschleife und induziert damit einen Kreisstrom. In welcher Richtung verläuft dieser? Zeichnen Sie ihn ein.

Lösung: Wir betrachten den magnetischen Fluss durch einen Kreis (Rohrquerschnittsfläche) oberhalb des Magneten. Wir orientieren sie „nach oben“($\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \mathrm{d}A\ \boldsymbol{e}_z$). Der magnetische Fluss durch einen Rohrquerschnitt oberhalb des Magneten nimmt ab, wenn er fällt. $U_{\mathrm{ind}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_{\mathrm{mag}}$ ist also positiv, geht also gegen den Uhrzeigersinn. (Diese Richtung bekommt man mit der rechten-Hand-Regel aus der Orientierung der Fläche)

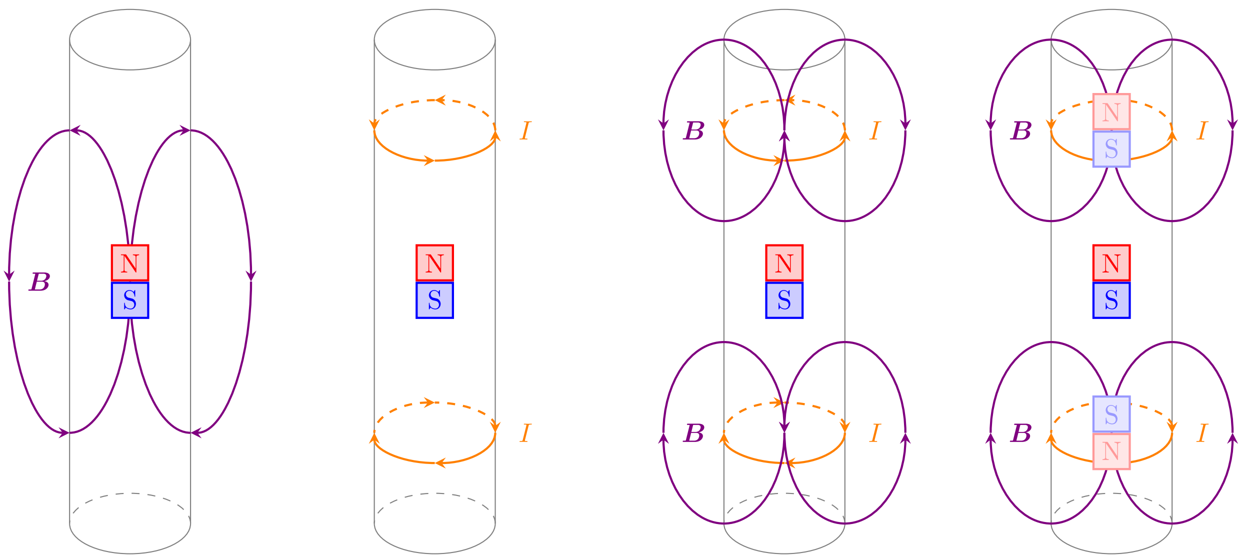
(d) Der Kreisstrom erzeugt ein magnetisches Feld. Wie ist es orientiert? Zeichnen Sie einige Feldlinien. Wie müsste ein Permanentmagnet orientiert sein, damit er ein solches Feld erzeugt? Zeichnen Sie einen solchen Magneten ein.

Lösung: Wir stellen uns den Strom als Leiterschleife vor. Die Richtung des erzeugten Magnetfelds erhalten wir mit rechter-Hand-Regel (Daumen ist I, gekrümmte Finger sind $\boldsymbol{B}$)

(e) In welche Richtung zeigt also die Kraft, die das erzeugte Magnetfeld auf den fallenden Magneten ausübt?

Lösung:

Die auftretende Kraft ist die vom fallenden Magneten im Magnetfeld $\boldsymbol{B}$. Der virtuelle Magnet, der einzuzeichnen war, dient nur dazu, sich die Kraftrichtung zu verdeutlichen. Sie ist nach oben.



(b) (c) (d) (d), ii

(f) Wiederholen Sie die obige Konstruktion für eine Leiterschleife ein gutes Stück unterhalb des Magneten. In welche Richtung zeigt nun die Kraft?

Lösung: Dies haben wir oben bereits eingezeichnet.

Diesmal nimmt der magnetische Fluss *zu*. Alles weitere wird genau wie oben begründet, aber alle Richtungen sind wegen diesem anderen Vorzeichen ($U_{\text{ind}} < 0$) umgekehrt.

Die Kraft zeigt auch hier nach oben. Der Südpol des virtuellen Magneten stößt den Südpol des echten ab.

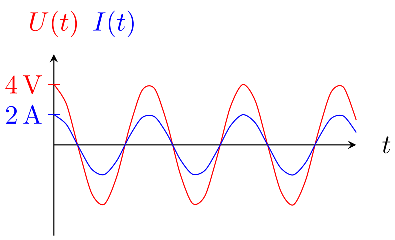
(g) Überzeugen Sie sich davon, dass die Kraftrichtungen die gleichen wären, wenn der Nordpol unten gewesen wäre.

Lösung: Hätten wir den Nordpol unten eingezeichnet, wären alle Richtungen genau andserherum. Dann wäre aber immer noch der obere virtuelle Magnet gleich gepolt wie der echte und der untere umgekehrt.

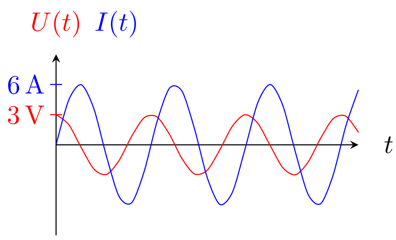
5 Wechselstromkreise und Impedanzen

Gegeben sei ein simpler Stromkreis mit einer Wechselspannungsquelle und einem einzigen unbekannten Bauteil. Die Wechselspannung $U(t)$ führt zu einem Strom $I(t)$.

(a) Bestimmen Sie aus den zeitlichen Verläufen in den folgenden Graphen die Impedanz Z des unbekannten Bauteils. Worum könnte es sich jeweils handeln?



(I)



(II)

Lösung: Bei (I) sind Strom und Spannung in Phase, was auf einen regulären Widerstand schließen lässt. Bei (II) eilt der Strom der Spannung um $\pi/2$ voraus, was auf eine Spule hindeutet.

(b) Nun sei die Spannung $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$. Skizzieren sie den Verlauf von $I(t)$ wenn das unbekannte Bauteil

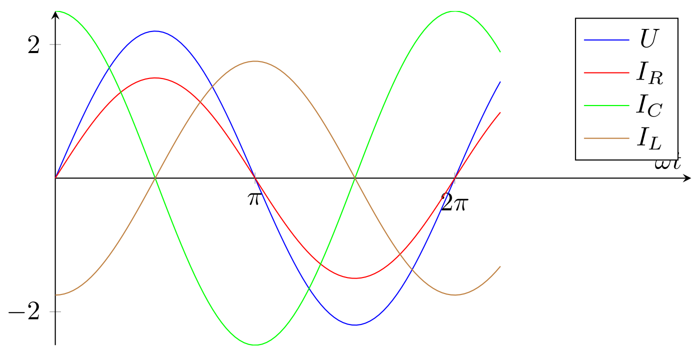
(i) ein Widerstand R,

(ii) ein Kondensator mit Kapazität C

(iii) eine Spule mit Induktivität L ist.

Geben Sie $I(t)$ explizit an.

Lösung:



Wir benutzen jeweils das erweiterte Ohm'sche Gesetz

(i) Ein Widerstand R

$$I(t) = \text{Re}\left[\frac{U(t)}{Z}\right] = \frac{U_0}{R}\sin(\omega t)$$

(ii) Ein Kondensator C

$$I(t) = \text{Re}\left[\frac{U(t)}{Z}\right] = \text{Re}\left[\mathrm{i}\omega C U_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \pi/2)}\right] = \text{Re}\left[\omega C U_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right] = \omega C U_0 \cos(\omega t) = \omega C U_0 \sin(\omega t + \pi/2)$$

(iii) Eine Spule L

$$I(t) = \mathrm{Re}\left[\frac{U(t)}{Z}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{U_0}{\mathrm{i}\omega L}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \pi/2}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{U_0}{\omega L}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \pi)}\right] = -\frac{U_0}{\omega L}\cos(\omega t) = \frac{U_0}{\omega L}\sin(\omega t - \pi/2)$$

(c) Die Impedanz $Z = |Z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ ist eine komplexe Zahl. Was ist die Bedeutung von $|Z|$? Was die der Phase φ?

Lösung: Wenn wir eine Spannung $U(t) = U_0\cos(\omega t)$ anlegen, erhalten wir einen Strom $I(t) = I_0\cos(\omega t - \phi)$ mit Amplitude I_0 und Phasenverschiebung ϕ gegenüber der Spannung.

$|Z|$ beschreibt, wie die Amplitude des Stroms von der Amplitude der Spannung abhängt. Es ist $U_0 = |Z|I_0$.

Die komplexe Phase φ entspricht genau der Phasenverschiebung. $\phi = \varphi$.

(d) Es seien ein Widerstand R, ein Kondensator C und eine Spule L in Reihe geschalten. Welche Bedingung muss gelten, damit der entstehende Wechselstrom mit einer angelegten Wechselspannung der Frequenz ω in Phase ist?

Lösung: Die resultierende Impedanz muss rein reel sein.

$$Z = R + \mathrm{i}\omega L + \frac{1}{\mathrm{i}\omega C} = \frac{R\omega C + \mathrm{i}\omega^2 LC - \mathrm{i}}{\omega C}$$
$$\mathrm{Im}\,[Z] = \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad LC = \frac{1}{\omega^2}$$

(e) Berechnen Sie für die Fälle in Teilaufgabe (b) jeweils die Wirk-, Schein- und Blindleistung.

Lösung: Wir können hierfür die Formeln aus der Vorlesung verwenden.

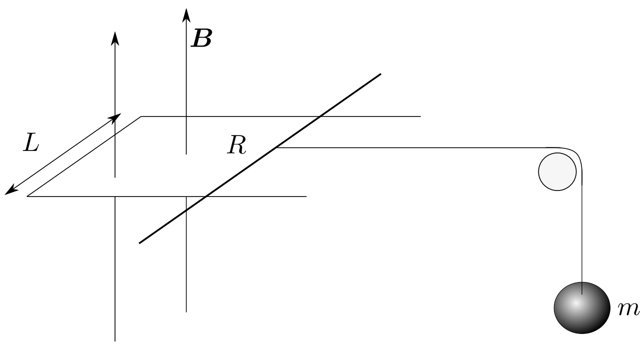
$$P_{\mathrm{Wirk}} = I_{\mathrm{eff}}U_{\mathrm{eff}}\cos(\varphi), \qquad P_{\mathrm{Schein}} = I_{\mathrm{eff}}U_{\mathrm{eff}}, \qquad P_{\mathrm{Blind}} = I_{\mathrm{eff}}U_{\mathrm{eff}}\sin(\varphi)$$

wobei $I_{\mathrm{eff}} = I_{\max}/\sqrt{2}$, $U_{\mathrm{eff}} = U_{\max}/\sqrt{2}$ und φ der Phasenunterschied ist. Dann erhalten wir

	Wirkleistung	Scheinleistung	Blindleistung
R	$U_0^2/2R$	$U_0^2/2R$	0
C	0	$\omega CU_0^2/2$	$\omega CU_0^2/2$
L	0	$U_0^2/2\omega L$	$-U_0^2/2\omega L$

6 Induktionsbremse

Ein Stück Draht der Länge L mit elektrischem Widerstand R liege auf einer Drahtgabel auf (siehe Skizze). Er kann reibungsfrei auf der Gabel entlangrollen und ist leitend mit ihr verbunden, so dass eine rechteckige Leiterschleife entsteht. Diese sei von einem homogenen magnetischen Feld $B = 3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$ durchdrungen. Der bewegliche Draht ist über ein Seil und eine (reibungsfreie) Umlenkrolle mit einem Gewicht der Masse m verbunden, welches ihn nach links zieht.



(a) Zu einem Zeitpunkt bewege sich das Gewicht mit Geschwindigkeit v nach unten. Welche Kräfte wirken auf den beweglichen Draht? Wie groß sind sie und in welche Richtung zeigen sie?

Lösung:

Das Gewicht zieht die Masse nach unten und somit den Draht nach links. $F_g = mg$.

Die Lorentzkraft zieht gemäß der Regel von Lenz den Draht zur Gabelmitte und somit nach rechts.

$$F_L = ILB = LB\frac{U_{\mathrm{ind}}}{R} = \frac{LB}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}BLx = \frac{(LB)^2}{R}v$$

(b) Stellen sie die Bewegungsgleichung für die Position des beweglichen Drahts auf. Der Draht sei zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe. Leiten sie eine DGL für seine Geschwindigkeit $v(t)$ ab und lösen Sie sie. Skizzieren Sie $v(t)$.

Lösung:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F_g - F_L = mg - \frac{(LB)^2}{R}v$$

Die homogene Lösung ist eine Exponentialfunktion und die partikuläre Lösung ist eine Konstante. Zusammen mit der Randbedingung $v(0) = 0$ erhalten wir

$$v(t) = \frac{mgR}{(LB)^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{(LB)^2}{mR}t\right)\right]$$