Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs

Experimentalphysik 2

Sommersemester 2019

Aufgabenblatt 2 – Lösung

Elektrische Ströme und Magnetostatik

Korbinian Eschbaum

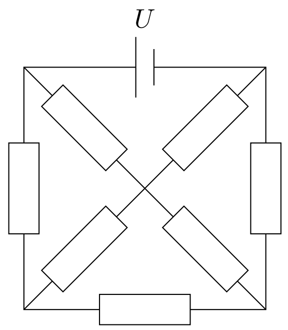
Jakob Unfried

1 Stromkreise

(a) Vergleichen Sie das Verhalten von Kapazitäten von Kondensatoren und Widerständen in Reihen- und Parallelschaltungen. Was stellen Sie fest?

Lösung: Widerstände werden in Reihenschaltung addiert, in Parallelschaltung ihr Kehrwert. Bei Kapazitäten ist dies genau umgekehrt.

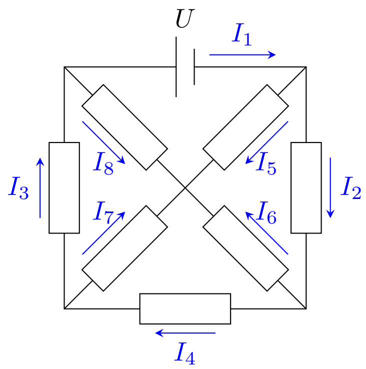
(b) Betrachten Sie folgenden Schaltkreis:



Alle Widerstände haben denselben Betrag R. Stellen Sie mit den Kirchhoff'schen Regeln alle Gleichungen zur Berechnung der Ströme auf.

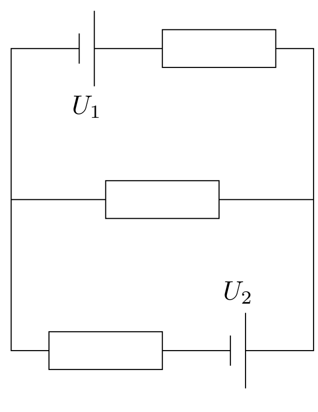
Lösung:

Wir wählen folgende Bezeichnungen:



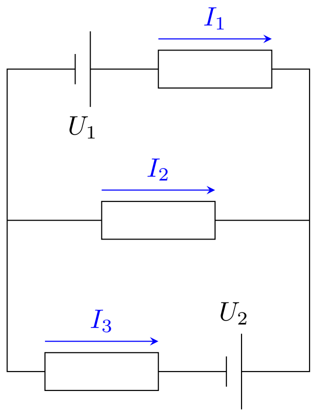
$$
\begin{aligned}
U &= R(I_8 - I_5) \qquad & I_1 &= I_2 + I_5 \\
0 &= R(I_2 + I_6 - I_5) \qquad & I_2 &= I_6 + I_4 \\
0 &= R(I_4 + I_7 - I_6) \qquad & I_4 &= I_3 + I_7 \\
0 &= R(I_3 + I_8 - I_7) \qquad & I_3 &= I_1 + I_8
\end{aligned}
$$

(c) Betrachten Sie nun die folgende Schaltskizze mit identischen Widerständen R:



Stellen Sie die Gleichungen nach den Kirchhoff'schen Regeln auf und berechnen Sie die Ströme.

Lösung:



Aus der Maschenregel folgt

$$U_1 = R(-I_1 + I_2), \qquad U_2 = R(I_2 - I_3)$$

Aus der Knotenregel folgt

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Damit können wir I_2 sofort eliminieren.

$$\begin{aligned}
&& \frac{U_1}{R} &= -2I_1 - I_3, && \frac{U_2}{R} = -I_1 - 2I_3 \\
\Rightarrow && \frac{U_1 - 2U_2}{R} &= 3I_3 && \Rightarrow \quad I_3 = \frac{U_1 - 2U_2}{3R} \\
\Rightarrow && I_1 &= -\frac{U_2}{R} - 2I_3 = \frac{4U_2 - 3U_2 - 2U_1}{3R} = \frac{U_2 - 2U_1}{3R} \\
\Rightarrow && I_2 &= -I_1 - I_3 = \frac{2U_1 - U_2 - U_1 + 2U_2}{3R} = \frac{U_1 + U_2}{3R}
\end{aligned}$$

$$\boxed{I_1 = \frac{U_2 - 2U_1}{3R}, \qquad I_2 = \frac{U_1 + U_2}{3R}, \qquad I_3 = \frac{U_1 - 2U_2}{3R}}$$

2 Magnetfeld durch Leiter

Betrachten Sie einen stromdurchflossenen Leiter (Stromstärke I) in Form eines Polygons mit N Ecken. Der Abstand vom Mittelpunkt zu den Seitenmittelpunkten sei d.

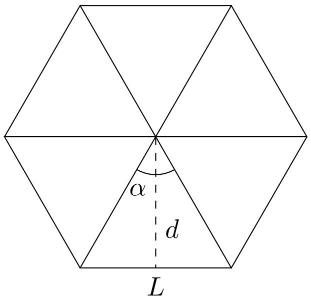
(a) Berechnen Sie das magnetische Feld $\boldsymbol{B}$ im Mittelpunkt des Polygons.

Hinweis: Benutzen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}^3} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C.$$

Lösung:

Zunächst bestimmen wir die Integrationsgrenzen, um das Gesetz von Biot-Savart anzuwenden.



$$\alpha = \frac{2\pi}{N}, \qquad \frac{L}{2d} = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Wir nutzen nun die Symmetrie des Polygons aus.

$$\boldsymbol{B} = N\boldsymbol{B}_0 = -N\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{-\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3} \times \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{\mu_0 N I}{4\pi}\int\limits_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{\sqrt{x^2+d^2}^3}\begin{pmatrix} x \\ -d \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} N d \boldsymbol{e}_z \int\limits_{-L/2}^{L/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+d^2}^3}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} N \boldsymbol{e}_z \frac{L}{d\sqrt{(L/2)^2+d^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\frac{NL}{\sqrt{L^2+4d^2}}\boldsymbol{e}_z$$

(b) Bilden Sie den Limes $N \to \infty$.

Lösung:

Im Limes $N \to \infty$ können wir den Tangens entwickeln $\tan(x) \approx x$.

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\frac{N 2d \frac{\pi}{N}}{\sqrt{4d^2\tan^2(\alpha)+4d^2}}\boldsymbol{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2d}\boldsymbol{e}_z$$

(c) Berechnen Sie nun dasselbe magnetische Feld für eine kreisförmige Leiterschleife mit Radius d. Stimmt das Ergebnis mit dem aus (a) überein?

Lösung:

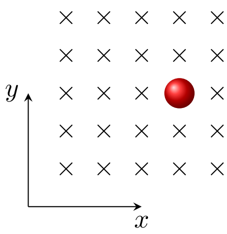
Hierfür benutzen wir Zylinderkoordinaten.

$$\boldsymbol{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{-d\boldsymbol{e}_r}{d^3} \times d\boldsymbol{e}_\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2\pi}{d}\boldsymbol{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2d}\boldsymbol{e}_z$$

Dasselbe Ergebnis erhalten wir auch in (a).

3 Lorentzkraft

Betrachten Sie eine Punktladung $q > 0$ mit Masse m, die sich in einem homognenen Magnetfeld $\boldsymbol{B} = -B\boldsymbol{e}_z$ befindet (siehe Skizze).



(a) Die Punktladung bewege sich zunächst mit Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_y$. Berechnen Sie die Lorentzkraft, die auf die Punktladung wirkt, sowie den Bahnradius.

Lösung:

$$\boldsymbol{F}_L = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = -qvB\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = -qvB\boldsymbol{e}_x$$

Für den Bahnradius benötigen wir zusätzlich noch die Zentripetalkraft.

$$qvB = F_L = F_Z = m\frac{v^2}{r} \qquad \Leftrightarrow \qquad r = \frac{mv}{qB}$$

(b) Wir wechseln nun in ein Bezugssystem, in welchem die Punktladung unmittelbar zu Beginn in Ruhe ist. Daher ist in diesem Bezugssystem die Lorentzkraft 0 und die Ladung bewegt sich nicht. Wie kann das sein? Sollte die physikalische Bewegung nicht unabhängig vom Bezugssystem sein?

Lösung:

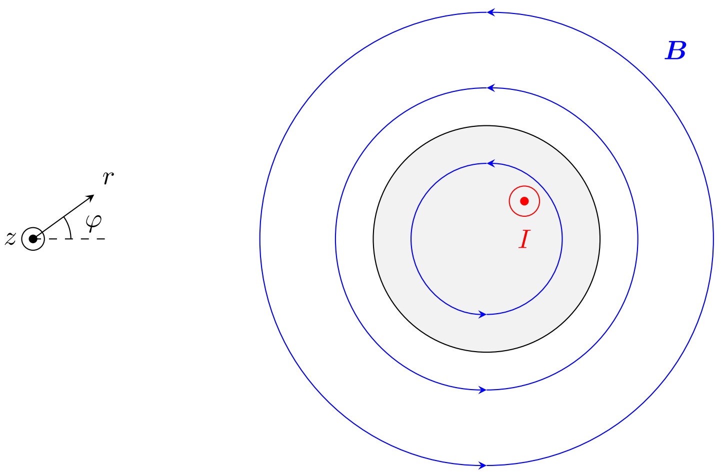
Diese Überlegung basiert auf der Annahme, dass unter Änderung des Bezugssystems elektrische und magnetische Felder invariant bleiben. Dies ist aber nicht der Fall. Im Ruhesystem der Ladung ist ein elektrisches Feld präsent, welches die Punktladung eine Kraft spüren lässt.

4 Dickes Kabel

Betrachten Sie ein (unendlich langes, gerades) Kabel mit kreisförmigem Querschnitt und Radius $R_0 = 3\,\text{mm}$. Es sei von einem homogenen Strom von $I = 2\,\text{A}$ durchflossen.

(a) Skizzieren Sie das Kabel im Querschnitt. Zeichnen Sie die Stromrichtung und einige Feldlinien des vom Strom erzeugten magnetischen Feldes ein. Definieren Sie ein Koordinatensystem.

Lösung:



I und $\boldsymbol{B}$ hängen über die *rechte*-Hand-Regel zusammen.

Wir wählen (wie eingezeichnet) Zylinderkoordinaten, weil dies der Symmetrie des Problems entspricht.

(b) Berechnen sie das magnetische Feld $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ außerhalb **und** innerhalb des Kabels. Skizzieren Sie die Abhängigkeit vom Abstand r von der Mittelachse.
Hinweis: Orientieren Sie sich an der Aufgabe zum Zylinderkondensator auf Blatt 1.

Lösung: Zunächst stellen wir fest, dass aus Symmetriegründen

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = B(r)\boldsymbol{e}_\varphi$$

Dann wollen wir den Satz von Stokes verwenden. (Der mathematische Integralsatz heißt Satz v. Stokes, das physikalische Resultat heißt Ampere'sches Durchflutungsgesetz.)

Dazu wählen wir als Integrationsfläche A einen Kreis mit Radius R in der $r\varphi$-Ebene. Wir wählen die Orientierung „nach oben", also mit Oberflächenelement $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = +\mathrm{d}\sigma\boldsymbol{e}_z$. Der Rand ∂A dieser Fläche ist der Kreisbogen. Seine Orientierung („mit oder gegen Uhrzeigersinn") ist von der Orientierung von A bestimmt (Rechte Hand Regel). Sein Wegelement ist also $\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{d}s\boldsymbol{e}_\varphi$ („gegen den Uhrzeigersinn").

Wir benötigen außerdem die Stromdichte des Kabels. Da der Strom homogen ist, ist sie überall im Kabel gleich

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} j_0\boldsymbol{e}_z := \frac{I}{\pi R_0^2}\boldsymbol{e}_z & \boldsymbol{r} \text{ im Kabel} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Nun mit Satz von Stokes

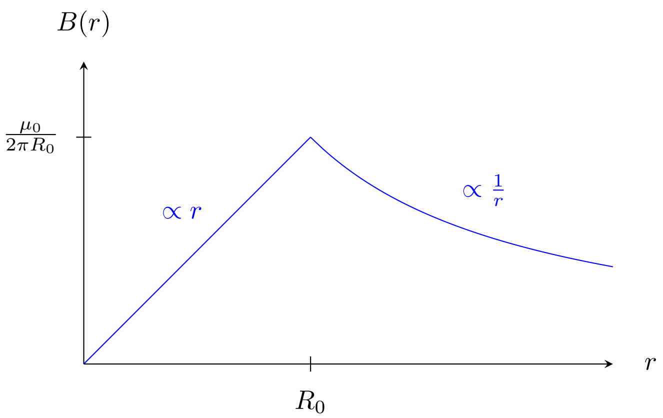
$$\mu_0 I_A = \int_A \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mu_0\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \int_A \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})) = \int_{\partial A}\mathrm{d}\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \int_{\partial A}\mathrm{d}s B(r) = B(R)\int_{\partial A}\mathrm{d}s = B(R)\cdot 2\pi R$$

Hierbei ist I_A der gesamte Strom, der durch die Integrationsfläche A fließt. Diese Gleichung können wir nach $B(R)$ auflösen, wir müssen aber unterscheiden ob wir im Kabel sind oder außerhalb.

Im Kabel: $R < R_0$
Es ist $I_A = \pi R^2 j_0 = I\frac{R^2}{R_0^2}$ und wir erhalten $B(R) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{R}{R_0^2}$.

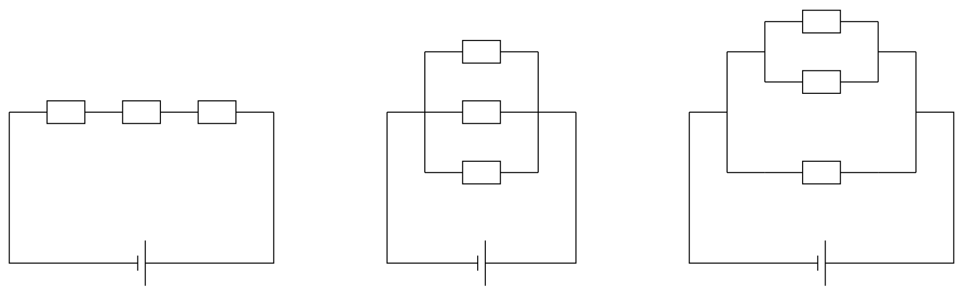
Außerhalb: $R > R_0$
Es ist $I_A = I$ und $B(R) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{1}{R}$

Insgesamt haben wir die folgende Abhängigkeit



5 Leistung in Widerstandsschaltungen

Betrachten Sie die folgenden Schaltbilder. Alle bestehen aus den gleichen Bauteilen: 3 identischen Widerständen und einer idealen Spannungsquelle.



(i) (ii) (iii)

(a) Von welcher Schaltung erwarten Sie die höchste Heizleistung? Von welcher die niedrigste?

Lösung: Zunächst erkennen wir das (iii) das gleiche ist wie (ii). Wir stellen uns die Widerstände als Verbraucher vor und wollen sie möglichst gut versorgen, damit sie möglichst viel Heizleistung erbringen. Wie z.B. in handelsüblichen Mehrfachsteckdosen, wird dies von Paralellschaltung (ii) (und damit auch von (iii)) erreicht. (i) hat somit die niedrigste Leistung. Deswegen wird dies auch in der Versorgung von Elektrogeräten nicht so gemacht.

(b) Überprüfen Sie ihre Vermutung durch explizite Rechnung.

Lösung: Die einzelnen Widerstände haben einen Widerstand R, die Spannungsquelle eine Spannung U. Der Gesamtstrom ist bei den Schaltungen verschieden, aber die Spannung ist gleich. Die Leistung

$$P = UI = \frac{U^2}{R_{\text{ges}}}$$

wird maximal, wenn der Gesamtwiderstand minimal wird. Wir berechnen die jeweiligen Widerstände

$$\begin{aligned} R_{\text{(i)}} &= R + R + R = 3R \\ \frac{1}{R_{\text{(ii)}}} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{R} \quad \Rightarrow \quad R_{\text{(ii)}} = \frac{1}{3}R \\ R_{\text{(iii),oben}} &= R_{\text{(ii)}} = \frac{1}{3}R \end{aligned}$$

Also haben tatsächlich (ii) und (iii) den geringsten Widerstand und damit die größte Leistung.

6 Maxwell-Gleichungen

(a) Nennen Sie die 4 (zeitunabhängigen) Maxwellgleichungen.

Lösung:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} &= 0\\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} &= 0\\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{j}\end{aligned}$$

(b) Nennen Sie zu jeder eine anschauliche Intuition.
(z.B.: Spins sind die Quellen und Senken des Gravitationsfelds, befinden sich in einem Volumen Spins, so ist der Nettofluss des Gravitationsfelds durch die Oberfläche positiv. Dieses Beispiel ist im übrigen Unfug.)
Was bedeutet die Gleichung über $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}$ für die Feldlinien des magnetischen Felds? Was bedeutet die analoge Gleichung des elektrischen Felds für seine Feldlinien?

Lösung: Die Quellen und senken des elektrischen Felds sind die elektrischen Ladungen.

Das elektrische Feld ist (in der Elektrostatik) wirbelfrei.

Das magnetische Feld ist quellfrei. (Es gibt keine magnetischen Monopole oder magnetische Ladung)

Statische Ströme erzeugen magnetische Wirbelfelder.

Wegen $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ sind die magnetischen Feldlinien immer geschlossene Linien. (Bei einem Permanentmagneten zeichnet man oft nur den Teil der Linien außerhalb des Magneten, sie gehen jedoch in ihm weiter)

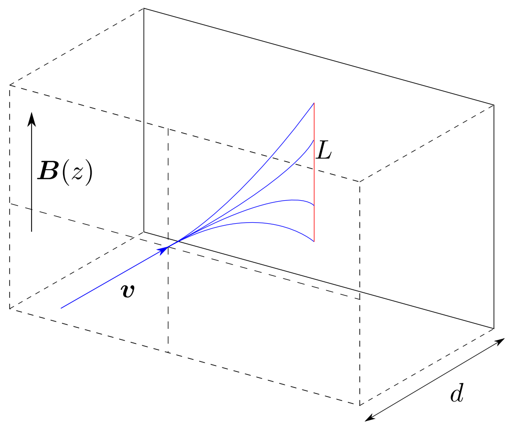
Die Feldlinien des elektrischen Feldes entspringen aus positiven Ladungen und enden in negativen Ladungen oder sie sind geschlossene Linien.

7 Stern-Gerlach Experiment

Das Stern-Gerlach Experiment demonstriert die Quantisierung des quantenmechanischen Drehimpulses („Spin“). Die Spins verhalten sich im Experiment anders, als man es klassisch (= ohne Quantenmechanik) erwarten würde. In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit der klassischen Erwartung.
Die Silberatome im Experiment haben ein magnetisches Dipolmoment von $p_m = 9{,}27 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{J/T}$. Die Ausrichtung der Dipolmomente ist zufällig (der Strahl ist „unpolarisiert“) sowie eine Masse von $m = 1{,}79 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg}$. Sie bewegen sich zu Anfang mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 200\,\mathrm{m/s}$ in x-Richtung. In einer Kammer der Länge $d = 50\,\mathrm{cm}$ werden die Atome durch ein inhomogenes Magnetfeld $\boldsymbol{B}(z) = (B_0 + \alpha \cdot z)\boldsymbol{e}_z$ mit $B_0 = 4\,\mathrm{T}$ und $\alpha = 2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{T/m}$ abgelenkt. Direkt hinter der Kammer befindet sich ein Schirm, auf dem die Atome aufschlagen und dort eine Markierung hinterlassen.

(a) Skizzieren Sie den Aufbau und insbesondere die Flugbahn der Atome.

Lösung:



(b) Wieso werden die Atome abgelenkt?

Lösung:

Die Energie des Dipols im Magnetfeld beträgt $E_{\mathrm{pot}} = -\boldsymbol{p}_m \cdot \boldsymbol{B} = -p_m(B_0 + \alpha z)\cos(\theta)$, wobei θ den Winkel zwischen Dipolmoment und Magnetfeld beschreibt. Aus der Inhomogenität ergibt sich damit eine Kraft $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} E_{\mathrm{pot}} = p_m \alpha \cos(\theta)\boldsymbol{e}_z$, die die Atome ablenkt.

(c) Welche Atome im Strahl werden am stärksten abgelenkt?

Lösung:

Nachdem $F \propto \cos(\theta)$ ist, werden die Atome am stärksten abgelenkt, deren Dipolmoment parallel zu $\boldsymbol{B}$ ausgerichtet ist.

(d) Auf dem Schirm entsteht eine Linie von Markierungen. Unter Idealbedingungen wäre sie vernachlässigbar dünn. Wie lang ist sie?

Lösung:

Für diese Aufgabe benötigen wir die Flugbahn der Atome.

$$\boldsymbol{F} = \alpha p_m \cos(\theta)\boldsymbol{e}_z = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2}$$

Wenn wir den Anfang der Kammer als $x = 0$ definieren und die Anfangsbedingungen $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$ sowie $\boldsymbol{v}(0) = v_0\boldsymbol{e}_x$ benutzen, erhalten wir

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} v_0 t \\ 0 \\ \frac{\alpha p_m}{2m}\cos(\theta)t^2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad z(x) = \frac{\alpha p_m}{2m}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \cos(\theta)$$

Nachdem der Kosinus Werte von -1 bis 1 annehmen kann, ist die Länge der Linie

$$L = \Delta z = \frac{\alpha p_m}{m}\left(\frac{d}{v_0}\right)^2 = 6{,}47\,\mathrm{\mu m}$$