



Ferienkurs

Experimentalphysik 2

Sommersemester 2019

Aufgabenblatt 1 – Lösung

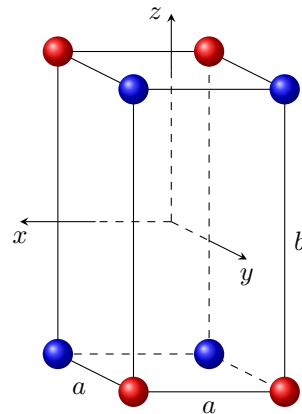
Elektrostatik

Korbinian ESCHBAUM

Jakob UNFRIED

1 Punktladungen

Betrachten Sie die folgende quaderförmige Ladungskonfiguration:



Die roten Kugeln stehen für Punktladungen $q > 0$ und die blauen Kugeln für Punktladungen $-q$. Der Ursprung des Koordinatensystems befinde sich genau in der Mitte.

(a) Bestimmen Sie das elektrische Feld am Ursprung.

Lösung:

Das elektrische Feld jeder Ladung wird durch die jeweils gegenüberliegende Ladung aufgehoben. $\mathbf{E}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

(b) Berechnen Sie das elektrische Feld auf der z -Achse.

Lösung: Wir betrachten einen beliebigen Punkt z . Dann gilt das Superpositionsprinzip.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(0, 0, z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(z - b/2)^2 + 2(a/2)^2}^3} \left(- \begin{pmatrix} -a/2 \\ -a/2 \\ z - b/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a/2 \\ -a/2 \\ z - b/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a/2 \\ a/2 \\ z - b/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a/2 \\ a/2 \\ z - b/2 \end{pmatrix} \right) \right] \\ &+ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(z + b/2)^2 + 2(a/2)^2}^3} \left(\begin{pmatrix} -a/2 \\ -a/2 \\ z + b/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a/2 \\ -a/2 \\ z + b/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a/2 \\ a/2 \\ z + b/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a/2 \\ a/2 \\ z + b/2 \end{pmatrix} \right) \right] \\ &= \frac{2aq}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(z - b/2)^2 + 2(a/2)^2}^3} - \frac{1}{\sqrt{(z + b/2)^2 + 2(a/2)^2}^3} \right] \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

(c) Berechnen Sie die notwendige Arbeit, um eine Probeladung Q von $(0, 0, \infty)$ nach $\mathbf{0}$ zu befördern.

Lösung:

Nachdem $\mathbf{E} \perp \mathbf{e}_z$ ist, muss auch keine Arbeit verrichtet werden. $W = 0$.

(d) Berechnen Sie das elektrische Feld auf der x -Achse.

Lösung:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, 0, 0) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x - a/2)^2 + (a/2)^2 + (b/2)^2}^3} \left(- \begin{pmatrix} x - a/2 \\ -a/2 \\ -b/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x - a/2 \\ a/2 \\ -b/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x - a/2 \\ a/2 \\ b/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x - a/2 \\ -a/2 \\ b/2 \end{pmatrix} \right) \right] \\ &+ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x + a/2)^2 + (a/2)^2 + (b/2)^2}^3} \left(- \begin{pmatrix} x + a/2 \\ -a/2 \\ -b/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x + a/2 \\ a/2 \\ -b/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x + a/2 \\ a/2 \\ b/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x + a/2 \\ -a/2 \\ b/2 \end{pmatrix} \right) \right] \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

2 Elektrischer Fluss

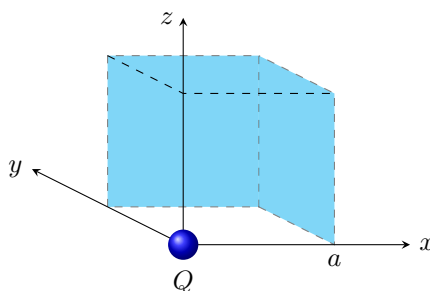
- (a) Verifizieren Sie durch explizite Integration, dass der elektrische Fluss einer Punktladung Q durch eine umschließende Kugeloberfläche mit Radius r , die die Punktladung im Mittelpunkt trägt, gegeben ist durch

$$\Phi_{\text{el}} = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Lösung:

$$\Phi_{\text{el}} = \iint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \iint_A \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \iint_{\Omega} d\Omega = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

- (b) Betrachten Sie ein dreidimensionales Koordinatensystem mit einer Punktladung Q im Ursprung. Ferner sei im ersten Quadranten ein Würfel der Seitenlänge a gegeben, der mit einer Ecke den Ursprung berührt (siehe Skizze).



Berechnen Sie den elektrischen Fluss durch die Würfelflächen, die die Punktladung nicht berühren (in der Skizze blau gekennzeichnet).

Hinweis: Benutzen Sie die unbestimmten Integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{(a^2+x^2)\sqrt{b^2+x^2}} = \frac{1}{a\sqrt{b^2-a^2}} \arctan\left(\frac{x\sqrt{b^2-a^2}}{a\sqrt{b^2+x^2}}\right) + C.$$

Lösung:

Wir können die Symmetrie des Systems ausnutzen, wodurch es genügt, nur eine Seite zu berechnen. Wir wählen hier die Seite, welche die x -Achse berührt.

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{el}} &= \iint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} a \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e}_x dy dz = \frac{Qa}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} \int_0^a \frac{dy}{\sqrt{1+\frac{y^2}{a^2+z^2}}} dz \\ &= \frac{Qa}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} \sqrt{a^2+z^2} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} dz = \frac{Qa}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} \sqrt{a^2+z^2} \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{a^2+z^2}}} dz \\ &= \frac{Qa^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} \frac{\sqrt{a^2+z^2}}{\sqrt{2a^2+z^2}} dz = \frac{Qa^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{dz}{(a^2+z^2)\sqrt{2a^2+z^2}} = \frac{Qa^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Wir multiplizieren das Ergebnis nun mit 3 (Anzahl der Flächen) und erhalten $\Phi_{\text{el}} = \frac{Q}{8\epsilon_0}$.

- (c) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus Teilaufgabe (a). Was stellen Sie fest?

Lösung:

Wenn wir das Ergebnis mit 8 (Anzahl aller Oktanten) multiplizieren, ergibt sich ein Gesamtfluss von Q/ϵ_0 , was wir auch in Teilaufgabe (a) erhalten. Wir sehen also, dass der Fluss unabhängig von der Form der Oberfläche ist, wenn er die ganze Ladung einschließt.

3 Dipol im elektrischen Feld

Betrachten Sie einen Dipol bestehend aus den Ladungen Q bei x_1 und $-Q$ bei x_2 und ein nicht verschwindendes elektrisches Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x})$.

- (a) Wir nehmen an, \mathbf{E} sei senkrecht zur Verbindungslinie $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ in jedem Punkt auf ihr. Wirkt dann immer ein Drehmoment auf den Dipol? Begründen Sie Ihre Antwort.

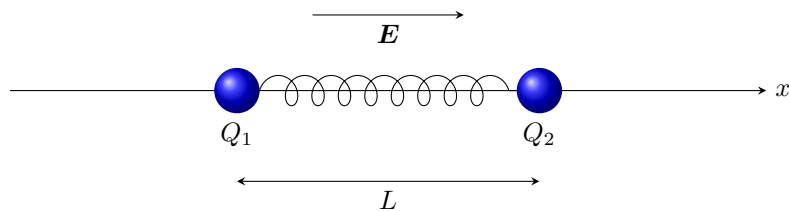
Lösung:

Nehmen wir an, $\mathbf{x}_2 = -\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{E}(\mathbf{x}_1) = -\mathbf{E}(-\mathbf{x}_1)$. Dann ist das Drehmoment

$$\mathbf{D} = Q\mathbf{x}_1 \times \mathbf{E}(\mathbf{x}_1) - Q\mathbf{x}_2 \times \mathbf{E}(\mathbf{x}_2) = Q\mathbf{x}_1 \times (\mathbf{E}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{E}(\mathbf{x}_2)) = Q\mathbf{x}_1 \times (\mathbf{E}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{E}(\mathbf{x}_1)) = \mathbf{0}$$

Wir sehen also, dass in diesem Fall das Drehmoment verschwindet.

- (b) Das elektrische Feld sei nun homogen und $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_x$. Zwei Ladungen $Q_1, Q_2 > 0$ seien nun nicht mehr mit einem festen Stab, sondern mit einer mechanischen Feder der Federkonstanten k (mit Gleichgewichtslänge 0) miteinander verbunden. Bestimmen Sie die Gleichung für den Gleichgewichtsabstand der beiden Ladungen voneinander in den Fällen $Q_2 \geq Q_1$ und $Q_2 = Q_1 = Q$. Sie müssen sie nicht lösen!



Lösung:

$$Q_2 = Q_1 = Q:$$

In diesem Fall können wir das externe Feld vernachlässigen.

$$F_{\text{el}} = F_{\text{mech}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2} = kL \quad \Leftrightarrow \quad L^3 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 k} \quad \Leftrightarrow \quad L = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 k}}$$

$$Q_2 > Q_1:$$

In diesem Fall zieht Q_2 die Ladungen weiter auseinander.

$$F_{\text{el}} + F_E = F_{\text{mech}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 L^2} + (Q_2 - Q_1)E = kL \quad \Leftrightarrow \quad kL^3 - (Q_2 - Q_1)EL^2 - \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} = 0$$

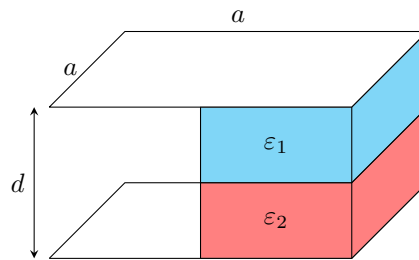
$$Q_2 < Q_1:$$

In diesem Fall drückt Q_1 die Ladungen weiter zusammen.

$$F_{\text{el}} = F_{\text{mech}} + F_E \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 L^2} = kL + (Q_1 - Q_2)E \quad \Leftrightarrow \quad kL^3 + (Q_1 - Q_2)EL^2 - \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} = 0$$

4 Plattenkondensator mit Dielektrika

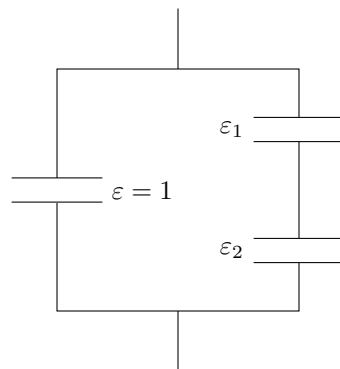
Berechnen Sie die Kapazität eines Plattenkondensators, welcher zur Hälfte Luft und zur Hälfte zwei Dielektrika mit Dielektrizitätskonstanten ε_1 und ε_2 jeweils zu gleichen Teilen in sich trägt (vgl. Skizze).



Hinweis: Überlegen Sie sich einen geeigneten Ersatzschaltkreis.

Lösung:

Der Ersatzschaltkreis besteht aus drei Kondensatoren.



Die Kapazität der einzelnen Kondensatoren beträgt

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{a^2}{2d}, \quad C_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{a^2}{d}, \quad C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{a^2}{d}$$

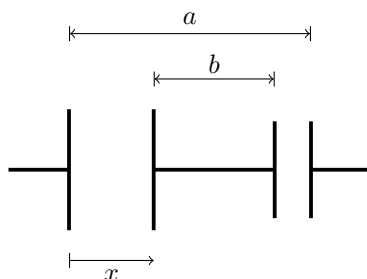
Wir verwenden nun die Additionsregeln für Kondensatoren in Schaltungen.

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_\varepsilon} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d}{\varepsilon_0 a^2} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \quad \Leftrightarrow \quad C_\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{a^2}{d} \\ \Rightarrow \quad C_{\text{ges}} &= C_0 + C_\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{a^2}{d} \left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right) \end{aligned}$$

5 Beweglicher Kondensator

Betrachten Sie die Anordnung in der unteren Skizze.

Es handelt sich um zwei Plattenkondensatoren, der linke mit Querschnittsfläche $A_1 = 400 \text{ cm}^2$, der rechte mit Querschnittsfläche $A_2 = 3/4 A_1$. Die jeweiligen Plattenabstände hängen von der Position x eines mittleren Bauteils ab. Es ist $a = 10 \text{ cm}$ und $b = 6 \text{ cm}$.



- (a) Berechnen Sie die gesamte Kapazität beider Kondensatoren als Funktion von x .

Lösung: Der Plattenabstand des ersten Kondensators ist x , der des zweiten ist $a - b - x$. Damit erhalten wir die Kapazitäten der einzelnen Kondensatoren

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{A_1}{x} \quad ; \quad C_2 = \varepsilon_0 \frac{A_2}{a - b - x} = \frac{3}{4} \varepsilon_0 \frac{A_1}{a - b - x}$$

Da die Kondensatoren in Reihe geschaltet sind erhalten wir die gesamte Kapazität durch inverse Addition

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\varepsilon_0 A_1} \left(x + \frac{4}{3} (a - b - x) \right) = \frac{1}{3\varepsilon_0 A_1} (4a - 4b - x)$$

$$C_{\text{ges}} = 3\varepsilon_0 \frac{A_1}{4(a - b) - x}$$

- (b) An die beiden Kondensatoren sei nun die konstante Spannung $U = 5 \text{ V}$ angelegt. Berechnen Sie die Gesamtenergie beider Kondensatoren als Funktion von x . Wo ist diese minimal und welchen Wert hat sie dort?

Lösung: Die Spannung bleibt konstant. Wenn sich also durch x die Kapazität des Aufbaus verändert, wird sich die Ladung des Kondensators verändern. Die Energie des Kondensators ist

$$W = \frac{1}{2} C_{\text{ges}} U^2 = \frac{3}{2} \varepsilon_0 U^2 \frac{A_1}{4(a - b) - x}$$

Die Ruhelage finden wir, indem wir die Energie W minimieren. Dazu muss der Nenner maximal werden, also x minimal. Also $x_0 = 0$. Dann ist die Energie in der Ruhelage

$$W_0 = W(x = x_0) = \frac{3}{2} \varepsilon_0 U^2 \frac{A_1}{4(a - b)} = 0.83 \times 10^{-10} \text{ J}$$

- (c) Nun werden die beiden Kondensatoren zunächst mit der Spannung $U_i = 4 \text{ V}$ in der Position $x_i = 3 \text{ cm}$ aufgeladen. Danach wird die Spannungsquelle abgetrennt und die Kondensatoren von der Umwelt isoliert. Berechnen Sie die Gesamtenergie beider Kondensatoren als Funktion von x . Wo ist diese nun minimal und welchen Wert hat sie dort?

Lösung: Nun bleibt (nach dem anfänglichen Ladevorgang), im Unterschied zu (b) die Ladung des Kondensators konstant. Diese berechnen wir zunächst

$$Q = C_{\text{ges}}(x = x_i) \cdot U_i = 3\varepsilon_0 U_i \frac{A_1}{4(a - b) - x_i} = 3.27 \times 10^{-11} \text{ A s}$$

Ändert man nun die Gesamtkapazität, geht dies mit einer Spannungsänderung einher. Die Gesamtenergie ist

$$W = \frac{1}{2C_{\text{ges}}} Q^2 = \frac{1}{2} \frac{C_{\text{ges}}(x = x_i)^2}{C_{\text{ges}}} U_i^2 = \frac{3}{2} \varepsilon_0 A_1 \frac{4(a - b) - x}{(4(a - b) - x_i)^2} U_i^2$$

Die Ruhelage (minimales W) wird nun bei maximalem x erreicht, also $x_0 = a - b$. Dann ist die Energie in der Ruhelage

$$W_0 = W(x = x_0) = \frac{3}{2} \varepsilon_0 A_1 \frac{3(a - b)}{(4(a - b) - x_i)^2} U_i^2 = 6.04 \times 10^{-11} \text{ J}$$

6 Zylinderkondensator

In dieser Aufgabe leiten wir die Formel für die Kapazität eines Zylinderkondensators her. Die beiden Kondensatorplatten sind Zylindermantel, deren Dicke wir vernachlässigen. Der Zylinder habe eine Länge von L . Sie haben Radien $R_1 < R_2$. Vernachlässigen Sie Randeffekte. Es ergibt sich

$$C = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

- (a) Wir gehen davon aus, dass die innere Platte eine Ladung $+Q$ trägt und die äußere eine entgegengesetzte Ladung $-Q$. Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem aus und begründen sie mit Symmetrieargumenten, welche Form das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ hat. Stellen Sie sich dazu folgende Fragen: In welche Richtung zeigt das Feld? Gibt es Koordinaten, von denen es nicht abhängen kann?

Lösung: Wir wählen Zylinderkoordinaten (r, φ, z) , da diese der Symmetrie des Problems entsprechen.

Dass wir Randeffekte vernachlässigen, bedeutet, dass wir den Zylinder so behandeln, wie einen Teil eines unendlich langen Zylinders.

Das elektrische Feld zeigt immer in die \mathbf{e}_r -Richtung. Hätte es eine \mathbf{e}_φ -Komponente, würde es die Spiegelsymmetrie an Ebenen durch die z -Achse verletzen. Hätte es eine \mathbf{e}_z -Komponente würde es die Spiegelsymmetrie an Ebenen senkrecht zur z -Achse verletzen. (Letztere gilt nur unter Vernachlässigung von Randeffekten und ist der Grund, warum uns diese Näherung die Rechnung vereinfacht)

Das elektrische Feld hängt nur von r ab, da es sonst die Rotationssymmetrie um die z -Achse oder die Translationssymmetrie entlang der z -Achse verletzen würde. (Wieder gilt letztere nur, wenn man Randeffekte vernachlässigt)

Also hat das Feld die Form $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\mathbf{e}_r$.

Hinweis: Die Begründungen hier sind ausführlicher, als sie in Klausursituationen erwartet werden. Dort würde reichen „Aus Symmetriegründen ist $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\mathbf{e}_r$ “.

- (b) Wählen Sie ein geeignetes Integrationsvolumen und berechnen Sie mit dem Satz von Gauß das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ abhängig von Q .

Lösung: Wir wählen als Integrationsvolumen V einen Zylinder mit Radius R und Länge L , coaxial mit dem Kondensator. Sein Rand ∂V ist der Zylindermantel mit den beiden Kappen.

Wir müssen uns nicht mit der exakten Form des Oberflächenelements $d\sigma$ auseinandersetzen. Es reicht uns die Richtung: $d\sigma = d\sigma\mathbf{e}_r$ auf dem gekrümmten Mantel und $d\sigma = \pm d\sigma\mathbf{e}_z$ auf den Kappen. Da $E(r)$ auf dem Zylindermantel konstant ist, können wir es aus dem Integral herausziehen und das „leere“ Integral ergibt die Oberfläche des Zylindermantels. Die Kappen tragen nicht bei da hier $\mathbf{E} \perp d\sigma$.

Nun verwenden wir den Satz von Gauß

$$\begin{aligned} \frac{Q_V}{\epsilon_0} &= \int_V dV \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} = \int_V dV \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\partial V} d\sigma \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\text{Mantel}} d\sigma E(r) + \int_{\text{Kappen}} \underbrace{d\sigma \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})}_{=0} \\ &= E(R) \int_{\text{Mantel}} d\sigma = E(R) 2\pi R L \end{aligned}$$

Hierbei ist Q_V die Ladung die vom Volumen V eingeschlossen wird.

Für $R < R_1$ und $R > R_2$ ist diese Ladung 0 und in diesen Bereichen also $E(R) = 0$.

Für $R_1 < R < R_2$ ist $Q_V = +Q$ und wir erhalten insgesamt

$$E(R) = \begin{cases} 0 & R < R_1 \\ \frac{Q}{\epsilon_0 2\pi R L} & R_1 < R < R_2 \\ 0 & R > R_2 \end{cases}$$

- (c) Berechnen Sie die Spannung U zwischen den beiden Platten als Potentialdifferenz.

Lösung: Die Potentialdifferenz zwischen den beiden Platten erhalten wir durch Integration des elektrischen Feldes. Der Referenzpunkt r_{ref} an dem das Potential verschwindet kann willkürlich gewählt werden, Potentialdifferenzen hängen nicht von ihm ab.

$$U = \phi(R_2) - \phi(R_1) = \int_{R_1}^{R_2} dr E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0 2\pi L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{\epsilon_0 2\pi L} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

(d) Berechnen Sie die Kapazität des Kondensators und vergleichen Sie sie mit obiger Formel.

Lösung:

$$C = \frac{Q}{U} = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$