Technische Universität München
Physik Department

SoSe 2019 – Probeklausur Analysis 2

P. Krause, K. Schweizer

27.09.2019

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Diese Klausur besteht aus 6 Seiten (inklusive Deckblatt) und 9 Fragen. Es können 45 Punkte erzielt werden. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
Einzig erlaubtes Hilfsmittel ist ein, beidseitig, handbeschriebenes DIN-A4 Blatt. Insbesondere dürfen keine Fachbücher und Skripte sowie elektronischen Hilfsmittel jeder Art (z.B. Handy, Taschenrechner, Laptop,...) verwendet werden.
Abweichend davon ist die Mitnahme eines Wörterbuchs in dringenden Ausnahmefällen (schlechte Deutschkenntnisse) erlaubt. Das Wörterbuch muss der Klausuraufsicht vor Klausurbeginn zur Durchsicht unaufgefordert vorgelegt werden.

Punkteverteilung

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe:
Punkte:	3	6	2	4	11	4	3	7	5	45
Ergebnis:										

Viel Erfolg!

1. **Abbildungen** (3 Punkte)

Es sei $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ und $f : [0,1) \to S^1$ die Abbildung definiert durch $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)$ für $t \in [0,1)$. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

$\surd$ **f ist stetig.**

$\surd$ **f ist injektiv.**

$\surd$ **f ist surjektiv.**

○ f hat eine stetige Umkehrabbildung $f^{-1} : S^1 \to [0,1)$.

Lösung:

f ist stetig, weil sie aus stetigen Funktionen aufgebaut ist.

f ist bijektiv (also auch injektiv)

Die Polarkoordinaten zeigen die Surjektivität (oder folgend aus der Bijektivität).

Die letzte Option ist falsch.
Da f bijektiv, ist $f^{-1} : S^1 \to [0,1)$ wohldefiniert und eindeutig bestimmt. Wir benötigen die Definition der Stetigkeit: f^{-1} ist stetig wenn $\forall x_n \subset S^1$, mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in S^1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}(x_n) = f^{-1}(x)$.
Um zu zeigen, dass f^{-1} nicht stetig ist, reicht es aus ein Gegenbeispiel zu finden:
Die Folge $(x_n)_n$ in S^1 gegeben durch $x_n = (\cos(-2\pi/n), \sin(-2\pi/n))$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen $(1,0) \in S^1$, das Bild unter $f^{-1}(x_n)$ ist

$$f^{-1}(x_n) = 1 - \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\nrightarrow} 0$$

aber das Bild von $f^{-1}(x)$ ist

$$f^{-1}(x) = f^{-1}(1,0) = 0 \text{ da } 1 \notin [0,1)$$

d.h.

$$\lim_{n\to\infty} f^{-1}(x_n) \neq f^{-1}(x).$$

Also ist f^{-1} nach Definition nicht stetig. *1 Punkt je richtiger Antwort.*

2. **Differentiation** (6 Punkte)

(a) (3 Punkte) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ an jedem Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

i. $f(x,y,z) = \frac{1}{xy}$

ii. $f(x,y,z) = ze^{\frac{x}{y}}$

iii. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$

Lösung:

i. $\partial_x f(x,y,z) = \frac{-1}{x^2 y}$, $\partial_y f(x,y,z) = \frac{-1}{xy^2}$ und $\partial_z f(x,y,z) = 0$

ii. $\partial_x f(x,y,z) = \frac{z}{y} e^{\frac{x}{y}}$, $\partial_y f(x,y,z) = \frac{-xz}{y^2} e^{\frac{x}{y}}$ und $\partial_z f(x,y,z) = e^{\frac{x}{y}}$

iii. $\partial_x f(x,y,z) = 2x - 2yz$, $\partial_y f(x,y,z) = 2y - 2xz$ und $\partial_z f(x,y,z) = 2z - 2xy$

1 Punkt für jede richtig gelöste Teilaufgabe (0.5 Punkte wenn nur 2 Ableitungen richtig sind).

(b) (3 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die durch $f(x,y) = (\sin(x), \sin(y))$ gegebene Funktion. Berechnen Sie

$$Df(x_0)(v)$$

für den Punkt $x_0 = (0,0)$ und den Vektor $v = (12, 11)$.

Lösung:

Die Jacobi-Matrix von f am Punkt (x, y) ist

$$\begin{pmatrix} \cos(x) & 0 \\ 0 & \cos(y) \end{pmatrix}$$

und also ist die Ableitung von f am Punkt $(0, 0)$ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos(x) & 0 \\ 0 & \cos(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man erhält

$$Df(x_0)(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}$$

1 Punkt für richtigen Ansatz (Jacobi-Matrix ausrechnen), 1 Punkt für korrekte Jacobische, allgemein oder bei (0, 0), 1 Punkt für korrekte Antwort.

3. **Stetigkeit** (2 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x, y) \neq 0 \\ 1 & (x, y) = 0 \end{cases}$$

Ist f an der Stelle $(x, y) = 0$ stetig? Begründen Sie.

Lösung:

Ist nicht stetig: Für $x \neq 0$ ist f eine Verkettung stetiger Funktionen, aber nach dem Satz von l'Hospital gelten *1 Punkt für l'Hospital.*

$$f(x, 0) \to 1 \text{ für } x \to 0$$
$$f(0, y) \to 1 \text{ für } y \to 0$$

Die Funktion ist stetig in $(0, 0)$. *Je 0,5 Punkte für die Ableitungen.*

4. **Taylorentwicklung** (4 Punkte)

Berechnen Sie das Taylorpolynom vom Grad 2 von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \frac{1}{xy}$$

an der Stelle $a = (1, 2)$.

Lösung:

Die partiellen Ableitungen sind gegeben durch

$$\partial_x f = \frac{-1}{x^2 y} \qquad \partial_y f = \frac{-1}{xy^2}$$
$$\partial_x^2 f = \frac{2}{x^3 y} \qquad \partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f = \frac{1}{x^2 y^2} \qquad \partial_y^2 f = \frac{2}{xy^3}$$

1 Punkt für die Ableitungen.

Damit folgt für die Taylorreihe an der Stelle a

$$\begin{aligned} T(x, y) &= f(a) + df(a) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x, y) H_f(a) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x, y) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}xy + \frac{1}{8}y^2 \end{aligned}$$

1 Punkt für allgemeines Taylorpolynom, 1 Punkt fürs Einsetzen und ein Punkt fr das richtige Ergebnis.

5. **Extremalstellen** (11 Punkte)

Berechnen Sie die Minima und Maxima der Funktion

$$f \;:\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2 + 2x + 2y$$

auf dem abgeschlossenen Ball $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \leq 4\}$.

(a) (2 Punkte) Berechnen Sie die Extrema zuerst für das Innere des Balls.

(b) (9 Punkte) Berechnen Sie dann die Extrema für den Rand.

Lösung:

(a) Wir berechnen zuerst die kritischen Punkte von f im Inneren von B. Es gilt für alle Punkte $p = (x,y) \in B^\circ$

$$D_p f = (\partial_1 f(p), \partial_2 f(p)) = (2x+2, 2y+2). \qquad \textit{(1 Punkt)}$$

Der Punkt p ist also genau dann ein kritischer Punkt von f, wenn

$$2x + 2 = 2y + 2 = 0$$

oder anders ausgedrückt, wenn $p = (-1,-1)$. *(1 Punkt)*

(b) Für die kritischen Punkte von f auf dem Rand von B verwenden wir die Methode der Lagrange-Multiplikatoren und betrachten also die kritischen Punkte der Funktion *(1 Punkt)*

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + 2x + 2y - \lambda(x^2 + y^2 - 4). \qquad \textit{(1 Punkt)}$$

Die Bedingung $\partial_\lambda L(x,y,\lambda) = 0$ besagt gerade, dass $x^2 + y^2 = 4$. Die anderen sind

$$2x + 2 = 2x\lambda, \qquad 2y + 2 = 2y\lambda. \qquad \textit{(1 Punkt)}$$

Nach Substraktion respektive Addition dieser beiden Gleichungen ist ein äquivalentes Gleichungssystem durch

$$\begin{aligned} 2(x-y) &= 2(x-y)\lambda, \\ 2(x+y) + 4 &= 2(x+y)\lambda \qquad \textit{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

gegeben. Nach der ersten Zeile ist also $\lambda = 1$ oder $x = y$. Sind wir im ersten Fall, so gilt nach der zweiten Zeile der Widerspruch $4 = 0$. *(1 Punkt)*
Im zweiten Fall ($x = y$) erhalten wir mit der Kreisgleichung $x^2 + y^2 = 4$

$$2x^2 = 2y^2 = 4 \qquad \textit{(1 Punkt)}$$

und somit die Kandidaten

$$p_1 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}), \qquad p_2 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}). \qquad \textit{(1 Punkt)}$$

Wir berechnen $f(p) = -2$, $f(p_1) = 4 + 4\sqrt{2}$, $f(p_2) = 4 - 4\sqrt{2}$. Offenbar ist $4 - 4\sqrt{2} < 4 + 4\sqrt{2}$. Des Weiteren gilt $4 - 4\sqrt{2} < -2$ genau dann, wenn $3 - 2\sqrt{2}$ gilt. Aber $3^2 = 9 > 8 = (2\sqrt{2})^2$ und somit ist $4 - 4\sqrt{2} > -2$. Also nimmt f bei p_2 ein globales Minimum und bei p_1 ein globales Maximum an. *(2 Punkte.)*

Alternative: Um die kritischen Punkte auf dem Rand zu finden, kann man diesen auch mit der Kurve $\gamma \;:\; t \mapsto (2\cos t, 2\sin t, 0)$ parametrisieren. *(3 Punkte)* Wir betrachten also die Funktion

$$\begin{aligned} t \in [0, 2\pi] \mapsto g(t) = f(\gamma(t)) &= 4\cos^2 t + 4\sin^2 t + 2(2\cos t + 2\sin t) \\ &= 4 + 4(\cos t + \sin t) \qquad \textit{(2 Punkte)} \end{aligned}$$

und berechnen

$$g'(t) = -4\sin t + 4\cos t. \qquad \textit{(1 Punkt)}$$

Die Lösungen der Gleichung $g'(t) = 0$ sind gerade die Lösungen der Gleichung $\tan t = 1$, welche bei $t = \pi/4$ und $t = \pi/4 + \pi$ liegen. Setzt man diese Winkel in γ ein, so erhält man wie oben die Punkte p_1, p_2. *(2 Punkte)*

6. **Implizit definierte Funktionen** (4 Punkte)

Nehmen Sie an, dass y eine Funktion von x ist. Finden Sie $y' = \frac{dy}{dx}$ für

$$\frac{y}{x^3} + \frac{x}{y^3} = x^2y^4.$$

Lösung:

Wir multiplizieren beide Seiten mit y^3x^3:

$$y^4 + x^4 = x^5y^7. \qquad \textit{(0, 5 Punkte)}$$

Wir leiten beide Seiten der Gleichung ab und erhalten

$$D(y^4) + D(x^4) = x^5D(y^7) + D(x^5)y^7.$$

Verwende die Kettenregel für $D(y^4)$ und $D(y^7)$

$$4y^3y' + 4x^3 = x^5(7y^6y') + (5x^4)y^7, \qquad \textit{(1 Punkt)}$$

sodass durch Auflösen nach y'

$$4y^3y' - 7x^5y^6y' = 5x^4y^7 - 4x^3. \qquad \textit{(1 Punkt)}$$

Dies lässt sich noch umformen zu

$$y' = \frac{5x^4y^7 - 4x^3}{4y^3 - 7x^5y^6}. \qquad \textit{(0, 5 Punkte)}$$

7. **Pfadintegral** (3 Punkte)

Sei F das durch $F(x, y) = (-y^{1/3}, (xy)^{2/5})$ gegebene Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$, und sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ der Pfad $\gamma(t) = (t^2, t^3)$. Berechnen Sie $\int_\gamma F dt$.

Lösung:

Das Pfadintegral ist durch

$$\int_\gamma F dt = \int_0^1 \langle F(\gamma(t), \gamma'(t)\rangle dt$$

definiert. Es gilt $F(\gamma(t)) = (-t, t^2)$ und $\gamma'(t) = (2t, 3t^2)$, also

$$\int_\gamma F dt = \int_0^1 \langle(-t, t^2), (2t, 3t^2)\rangle dt = \int_0^1 (-2t^2 + 3t^4) dt = -\frac{-2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{-1}{15}$$

Je 1 Punkt für die Definition des Pfadintegrals, für das Berechnen von $F(\gamma(t))$ und $\gamma(t')$ und für die Lösung des Integrals.

8. **Vektorfelder** (7 Punkte)

Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$F(x, y) = (\lambda x \exp(y), (y + 1 + x^2) \exp(y))$$

konservativ? Bestimmen Sie für die Werte ein Potential von F.

Lösung:

Wir wissen aus der Vorlesung, dass ein Vektorfeld auf einer einfach zusammenhängenden Menge genau dann konservativ ist, wenn es die Integrabilitätsbedingung $\partial_y F_1 = \partial_x F_2$ erfüllt *(1 Punkt)*. Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, berechnen wir deshalb

$$\partial_y F_1(x,y) = \exp(y)\lambda x$$
$$\partial_x F_2(x,y) = 2\exp(y)x$$

(je 0.5 Punkte) Die Integrabilitätsbedingung ist daher genau dann erfüllt, wenn $\lambda = 2$ gilt *(1 Punkt)*. Um ein Potential zu finden, müssen wir eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ finden, so dass

$$\partial_x f(x,y) = 2x \exp y \qquad \partial_y f(x,y) = (y + 1 + x^2)\exp(y)$$

gilt *(je 0.5 Punkte)*. Aus der ersten Gleichung ergibt sich, dass f von der Form $f(x,y) = x^2 \exp(y) + c(y)$ sein muss mit einer zu bestimmenden Funktion $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(1 Punkt)*. Setzt man in die zweite Gleichung ein, so erhält man $c'(y) = (y+1)\exp(y)$, welche durch $c(y) = y\exp(y)$ gelöst wird *(1 Punkt)*. Daher ist

$$f(x,y) = (x^2 + y)\exp(y)$$

ein Potential für F, wenn $\lambda = 2$ *(1 Punkt)*.

9. **Gewöhnliche Differentialgleichungen** (5 Punkte)

Berechne die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' + y' - 6y = 1, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

Lösung:

Wir berechnen zuerst die homogene Lösung. Es ist $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$ *(0,5 Punkte)* und damit

$$y_{\text{hom}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}. \qquad (\textit{1 Punkt})$$

Für die partikuläre Lösung können wir einfach raten und erhalten $y_{\text{part}} = -\frac{1}{6}$. *(0,5 Punkte)* Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also durch

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{6} \qquad (0,5\ \textit{Punkte})$$

gegeben. Mit dem Anfangswert gilt

$$y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{6} = 0$$
$$y'(0) = 2C_1 - 3C_2 = 0. \qquad (\textit{1 Punkt})$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir, dass $C_2 = \frac{1}{6} - C_1$ *(0,5 Punkte)* und somit gilt mit der zweiten

$$0 = 2C_1 - 3(\frac{1}{6} - C_1) = 5C_1 - \frac{1}{2} \qquad (\textit{1 Punkt})$$

und $C_1 = \frac{1}{10}$. Weiter ist $C_2 = \frac{1}{15}$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(x) = \frac{1}{10}e^{2x} + \frac{1}{15}e^{-3x} - \frac{1}{6}. \qquad (\textit{1 Punkt})$$