Technische Universität München
Physik Department

SoSe 2019 – Probeklausur Analysis 2

P. Krause, K. Schweizer

27.09.2019

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Diese Klausur besteht aus 2 Seiten (inklusive Deckblatt) und 9 Fragen. Es können 45 Punkte erzielt werden. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
Einzig erlaubtes Hilfsmittel ist ein, beidseitig, handbeschriebenes DIN-A4 Blatt. Insbesondere dürfen keine Fachbücher und Skripte sowie elektronischen Hilfsmittel jeder Art (z.B. Handy, Taschenrechner, Laptop,...) verwendet werden.
Abweichend davon ist die Mitnahme eines Wörterbuchs in dringenden Ausnahmefällen (schlechte Deutschkenntnisse) erlaubt. Das Wörterbuch muss der Klausuraufsicht vor Klausurbeginn zur Durchsicht unaufgefordert vorgelegt werden.

Punkteverteilung

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe:
Punkte:	3	6	2	4	11	4	3	7	5	45
Ergebnis:										

Viel Erfolg!

1. **Abbildungen** (3 Punkte)
Es sei $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ und $f \;:\; [0, 1) \to S^1$ die Abbildung definiert durch $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)$ für $t \in [0, 1)$. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?
◯ f ist stetig.
◯ f ist injektiv.
◯ f ist surjektiv.
◯ f hat eine stetige Umkehrabbildung $f^{-1} \;:\; S^1 \to [0, 1)$.

2. **Differentiation** (6 Punkte)
   (a) (3 Punkte) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ an jedem Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.
      i. $f(x, y, z) = \frac{1}{xy}$
      ii. $f(x, y, z) = ze^{\frac{x}{y}}$
      iii. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$
   (b) (3 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die durch $f(x, y) = (\sin(x), \sin(y))$ gegebene Funktion. Berechnen Sie
$$Df(x_0)(v)$$
für den Punkt $x_0 = (0, 0)$ und den Vektor $v = (12, 11)$.

3. **Stetigkeit** (2 Punkte)
Sei $f \;:\; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x, y) \neq 0 \\ 1 & (x, y) = 0 \end{cases}$$
Ist f an der Stelle $(x, y) = 0$ stetig? Begründen Sie.

4. **Taylorentwicklung** (4 Punkte)
Berechnen Sie das Taylorpolynom vom Grad 2 von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$f(x, y) = \frac{1}{xy}$$
an der Stelle $a = (1, 2)$.

5. **Extremalstellen** (11 Punkte)
Berechnen Sie die Minima und Maxima der Funktion
$$f \;:\; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2 + 2x + 2y$$
auf dem abgeschlossenen Ball $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \leq 4\}$.
   (a) (2 Punkte) Berechnen Sie die Extrema zuerst für das Innere des Balls.
   (b) (9 Punkte) Berechnen Sie dann die Extrema für den Rand.

6. **Implizit definierte Funktionen** (4 Punkte)
Nehmen Sie an, dass y eine Funktion von x ist. Finden Sie $y' = \frac{dy}{dx}$ für
$$\frac{y}{x^3} + \frac{x}{y^3} = x^2 y^4.$$

7. **Pfadintegral** (3 Punkte)
Sei F das durch $F(x, y) = (-y^{1/3}, (xy)^{2/5})$ gegebene Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$, und sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ der Pfad $\gamma(t) = (t^2, t^3)$. Berechnen Sie $\int_\gamma F dt$.

8. **Vektorfelder** (7 Punkte)
Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch
$$F(x, y) = (\lambda x \exp(y), (y + 1 + x^2) \exp(y))$$
konservativ? Bestimmen Sie für die Werte ein Potential von F.

9. **Gewöhnliche Differentialgleichungen** (5 Punkte)
Berechne die Lösung des Anfangswertproblems
$$y'' + y' - 6y = 1, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$