Übungsblatt 4 26.09.2019

Aufgabe 1 Beispiel

Klassifiziere die folgenden Differentialgleichungen in Bezug auf Linearität, Homogenität, ihre Ordnung und ihren Grad:

(a) $(x+y)^2 \frac{dy}{dx} = 3$,

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = x^3$,

(c) $2\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} = 2s + s\cos t$

(d) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 = y^2$

Aufgabe 2

Nutze die Methode der Separation der Variablen, um eine Funktion y zu finden, die $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3}{y^2}$ löst.

Aufgabe 3

Nutze die Methode der Separation der Variablen, um eine Funktion y zu finden, die $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(-x)+e^{4x}}{y^2}$ löst.

Aufgabe 4 Lennard-Jones Potential

Die Kraft zwischen zwei Teilchen kann abgebildet werden durch die Funktion

$$F = \frac{12\varepsilon}{a_0}\left[\left(\frac{a_0}{r}\right)^{13} - \left(\frac{a_0}{r}\right)^{7}\right]$$

Für das Potential U einer Kraft F gilt $F = -\frac{d}{dr}U$. Berechne das Potential zwischen zwei Teilchen für den Fall, dass bei $r = a_0$ für das Potential $U = -\varepsilon$ gilt.

Aufgabe 5

Löse die DGL zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 7e^{-2x}.$$

Aufgabe 6 Oszillator

Die Bewegung eines gedämpften, getriebenen Oszillators kann beschrieben werden durch

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} = \lambda\cos(\omega t),$$

wobei θ der Auslenkungswinkel des Pendels aus der Gleichgewichtslage, t die Zeit, ω die Kreisfrequenz und λ und b Konstanten sind. Finde die allgemeine Lösung dieser DGL.

Aufgabe 7

(a) Verwende die Substitution $v = u/t$ zur Bestimmung der maximalen Lösung des Anfangwertproblems

$$\begin{cases} t^2u'(t) - tu(t) - u^2(t) &= t^2, \\ u(1) &= 1. \end{cases}$$

(b) Bestimme durch Separation der Variablen die maximale Lösung des Anfangwertproblems

$$\begin{cases} u'(t) + e^{u(t)} &= 1, \\ u(0) &= log(2). \end{cases}$$

Aufgabe 8

Zeige, dass

$$\exp(A+B) = \exp(A) + \exp(B)$$

für alle kommutierenden Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, d. h. $A \cdot B = B \cdot A$, gilt. Folgere, dass das Bild des Matrixexponentials exp in der Teilmenge $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ der invertierbaren Matrizen liegt.

Aufgabe 9

Sei $A \in \mathrm{Mat}_d(\mathbb{R})$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u'(t) = A \cdot u(t).$$

Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) Die Matrix A ist nilpotent.

b) Jede Lösung u der DGL ist ein Polynom.

c) Es gibt d linear unabhängige polynomiale Lösungen der DGL.

Aufgabe 10

Sei $A \in \mathrm{Mat}_d(\mathbb{R})$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x'(t) = A \cdot x(t).$$

Finde das Matrixexponential e^{At}, das die DGL löst für die folgenden Matrizen A.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 11

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 2y + \sin x, \qquad y(0) = \frac{1}{2}.$$