Ferienkurs Analysis 2 | **Technische Universität München**
SoSe 2019 | P.Krause, K. Schweizer

Übungsblatt 3 — 25.09.2019

Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld $f(x,y,z) = (-xy, x^2, z^3)$ und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ der Weg $\gamma(t) = (\cosh(t), \sinh(t), 1)$. Berechne den Wert des Wegintegrals

$$\int_\gamma f ds.$$

Lösung:

Nach Definition des Wegintegrals gilt

$$\int_\gamma f ds = \int_0^1 \langle f(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\rangle dt = \int_0^1 (-\cosh(t)\sinh^2(t) + \cosh^3(t))dt$$

was sich unter der Verwendung von $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$ vereinfacht zu

$$\int_0^1 \cosh(t)dt = \sinh(1).$$

Aufgabe 2

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x,y) = x + y$. Was ist der Wert des Wegintegrals $\int_\gamma f ds$ von f über den Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,1)$ und $(1,0)$?

Lösung:

$$\int_\gamma f ds = 1 + \sqrt{2}$$

Aufgabe 3

Sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und der Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

(a)

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y}\cos(xy) - ye^{x+y}\sin(xy) \\ e^{x+y}\cos(xy) - xe^{x+y}\sin(xy) \end{pmatrix}, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 + t^{13} \\ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\sqrt[17]{t} \end{pmatrix}$$

(b)

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy + e^x \\ x^2 \end{pmatrix}, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \log(t^{10} + 1) \\ e^{t^{10}-1} \end{pmatrix}$$

Was ist der Wert des Wegintegrals $\int_\gamma F dt$ von F entlang γ?

Lösung:

(a) $e^{2+\pi}$

(b) $\log(2)^2 + 1$

Aufgabe 4

Eine **Schlaufe** in einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Weg $\gamma : [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$. Zeige, dass ein stetiges Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}^n$ genau dann konservativ ist, wenn für jede stückweise stetig differenzierbare Schlaufe γ in U

$$\int_\gamma F dt = 0$$

gilt.

Lösung:
Nach Definition ist ein stetiges Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}$ genau dann konservativ, wenn

$$\int_\gamma F dt = \int_\eta F dt$$

für alle stückweise stetig differenzierbaren Wege $\gamma, \eta : [0, 1] \to U$ mit $\gamma(0) = \eta(0)$ und $\gamma(1) = \eta(1)$.
Sei nun $\gamma : [0, 1] \to U$ eine Schlaufe. Dann sind Wege $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to U$ gegeben durch $\gamma_1(t) = \gamma(\frac{t}{2})$ und $\gamma_2(t) = \gamma(1 - \frac{t}{2})$ zwei stetig differenzierbare Wege mit $\gamma_1(0) = \gamma(0) = \gamma(1) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma(\frac{1}{2}) = \gamma_2(1)$. Daher gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma F dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} \langle F(\gamma(t), \gamma'(t)) \rangle dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \langle F(\gamma(t), \gamma'(t)) \rangle dt \\ &= \int_{\gamma_1} F dt - \int_{\gamma_2} F dt = 0\end{aligned}$$

Umgekehrt gelte $\int_\gamma F dt = 0$ für alle Schlaufen $\gamma : [0, 1] \to U$. Seien $\gamma, \eta : [0, 1] \to U$ zwei stückweise stetig differenzierbare Wege mit $\gamma(0) = \eta(0)$ und $\gamma(1) = \eta(1)$. Durchläuft man zuerst γ und dann η rückwärts so erhält man eine Schlaufe $\overline{\gamma}$. Formaler setzt man

$$\overline{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \eta(1 - 2t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Dann gilt

$$\int_\gamma F dt - \int_\eta F dt = \int_{\overline{\gamma}} F dt = 0$$

wie erwünscht.

Aufgabe 5

Welche der folgenden Vektorfelder sind konservativ? Begründe deine Antwort.

(a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} -y^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$

(b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$

(c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$

(d) $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} -\sin(x)\sin(y) \\ \cos(x)\cos(y) \end{pmatrix}$

Lösung:

(a) f_1 erfüllt nicht die Integrabilitätsbedingungen. **Nicht konservativ**

(b) Ein Potential f_2 ist gegeben durch $F_2(x, y) = \log(\sqrt{x^2 + y^2})$ Nun verwende Satz über Stammfunktionen. **Ist konservativ**

(c) Die partiellen Ableitungen sind

$$\partial_1 f_3(x, y) = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y2)^2} \qquad \partial_2 f_3(x, y) = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y2)^2}$$

womit die die Integrabilitätsbedingungen auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ erüllt wären. Dennoch ist f_3 nicht konservativ. Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ die stetige differenzierbare Schlaufe (der geschlossene Weg) definiert durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

für $t \in [0, 2\pi]$, die einmal im Gegenuhrzeigersinn um den Einheitskreis läuft. Dann ist

$$\int_\gamma f ds = \int_0^{2\pi} \langle \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \rangle dt = 2\pi$$

obwohl γ ein geschlossener Weg ist mit $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. **Nicht konservativ**

(d) f_4 erfüllt die Integrabilitätsbedingungen und hat sternförmigen Definitionsbereich. Nun verwende Satz über Integrabilitätsbedingungen auf sternförmigen Gebieten. **Ist konservativ**

Aufgabe 6

Sei $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \big| \, |x| < \frac{\pi}{2}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ und $F : U \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} y + y\tan^2(x) + \cos(z) \\ \tan(x) \\ -x\sin(z) \end{pmatrix}$$

Ist F konservativ? Falls ja, gib ein Potential von F an.

Lösung:

Die Jacobimatrix von F ist gegeben durch

$$DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2y\sec^2(x)\tan(x) & \sec^2(x) & -\sin(z) \\ \sec^2(x) & 0 & 0 \\ -\sin(z) & 0 & -x\cos(z) \end{pmatrix}$$

Da diese symmetrisch ist, erfüllt F die Integrabilitätsbedingung. Weil U einfach zusammenhängend ist, besitzt F ein Potential.
Integriert man die erste Koordinate nach x, so erhält ,am $f(x, y, z) = y\tan(x) + x\cos(z)$.
Man überprüfe, dass $\bigtriangledown f = F$ gilt.

Aufgabe 7

Sind die folgenden Vektorfelder konservativ? Wenn ja, gib das Potential an.

(a) $f(x, y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^3y \end{pmatrix}$

(b) $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2y \\ x^3 + 1 \\ 9z^2 \end{pmatrix}$

(c) $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy \\ z + x^2 \\ y \end{pmatrix}$

(d) $f(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

(e) $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ z \\ y - 1 \end{pmatrix}$

(f) $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z\cos(xz) + y \\ x \\ x\cos(xz) \end{pmatrix}$

(g) $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$

(h) $f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy^3 + 1 \\ 3x^2y^2 - 2y \end{pmatrix}$

(i) $f(x,y) = \begin{pmatrix} x\sin(y) \\ -y\sin(x) \end{pmatrix}$

(j) $f(x,y) = \begin{pmatrix} x\sin(y)+1 \\ \frac{x^2\cos(y)}{2} \end{pmatrix}$

Lösung:

(a) Nein.

(b) Ja. $F(x,y,z) = y + x^3y + 3z^2 + C$

(c) Ja. $F(x,y,z) = x^2y + yz + C$

(d) Nein

(e) Nein.

(f) Ja. $F(x,y,z) = xy + \sin(xz) + C$

(g) Ja. $F(x,y,z) = xyz + C$

(h) Ja. $F(x,y) = x + x^2y^3 - y^2 + C$

(i) Nein.

(j) Ja. $F(x,y) = x + \frac{x^2\sin(y)}{2} + C$

Aufgabe 8

Berechne die Divergenz der folgenden Vektorfelder.

(a) $f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(b) $f(x,y) = \begin{pmatrix} y^3 \\ xy \end{pmatrix}$

(c) $f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ -6xy \end{pmatrix}$

(d) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2z \\ -y \end{pmatrix}$

(e) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{4y}{x^2} \\ \sin(y) \\ 3 \end{pmatrix}$

(f) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^x \\ \ln(xy) \\ e^{xyz} \end{pmatrix}$

Lösung:

Die Divergenz ist allgemein gegeben durch

$$\triangledown \cdot f(x_1 \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial_i}$$

Damit ergeben sich folgende Resultate:

(a) $\triangledown f(x,y) = 2$

(b) $\triangledown f(x,y) = x$

(c) $\triangledown f(x,y) = 0$

(d) $\triangledown f(x,y,z) = 2x$

(e) $\bigtriangledown f(x,y,z) = -8yx^{-3} + \cos(y)$

(f) $\bigtriangledown f(x,y,z) = e^x + \frac{1}{y} + xye^{xyz}$

Aufgabe 9

Berechne die Rotation der folgenden Vektorfelder.

(a) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$

(b) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^3 \\ xy \\ -z \end{pmatrix}$

(c) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(d) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2z \\ -y \end{pmatrix}$

Lösung:

Die Rotation für ein Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\bigtriangledown \times f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial_y} - \frac{\partial f_2}{\partial_z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial_z} - \frac{\partial f_3}{\partial_x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial_x} - \frac{\partial f_1}{\partial_y} \end{pmatrix}$$

Damit ergeben sich folgende Resultate:

(a) $\bigtriangledown \times f(x,y,z) = 0$

(b) $\bigtriangledown \times f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y - 3y^2 \end{pmatrix}$

(c) $\bigtriangledown \times f(x,y,z) = 0$

(d) $\bigtriangledown \times f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10

Es sei M die 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^4 + xy + 2y^2 = 4\}$$

von $\mathbb{R}^2$. Der Tangentialraum von M im Punkt $p = (1,1) \in M$ ist gegeben durch $T_pM = \{p\} \times \mathbb{R}v$ für den Vektor

○ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

√ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

○ $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

○ $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Lösung:

Gemäß dem Satz über die Charakterisierung von T_pM und N_pM aus der Vorlesung, ist der Tangentialraum T_pM genau $\{p\} \times \ker D_pF$ für die Abbildung $F(x,y) = x^4 + xy + 2y^2 - 4$. Wegen $D_pF = \begin{pmatrix} 5 & 5 \end{pmatrix}$ ist dieser Kern gegeben duch $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 11

Gegeben sei die Teilmannigfaltigkeit

$$M\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y = 0\}$$

Bestimme eine Basis für den Tangentialraum T_pM bei $p = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$. Bestimme zudem eine Basis des Raums der Normalvektoren $(T_pM)^\perp$ an M bei p.

Lösung:

Die Teilmannigfaltigkeit M ist gegeben als Niveaumenge der Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, x + y)$$

In der Tat gilt $M = F^{-1}(0,0)$, und es lässt sich verifizieren, dass $DF(x,y)$ für alle $(x,y) \in M$ surjektiv ist. Daher wissen wir, dass $T_pM = \ker DF(p)$ gilt. Wir berechnen daher

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

so dass am Punkt $p = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$ gilt

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Methoden der linearen Algebra lässt sich nun zeigen, dass eine Basis von $\ker DF(p)$ durch den Vektor

$$w = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Der Raum aller Normalenvektoren $(T_pM)^\perp$ ist nun gerade durch alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^3$ gegeben, sodass $0 = \langle w, v \rangle = w^t v$ gilt, d.h. $(T_pM)^\perp = \ker(w^t)$ Wie zuvor kann man nun mittels linearer Algebra eine Basis des Kerns $\ker(w^t)$ zu

$$w_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \qquad w_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen.

Aufgabe 12

Sei $n \in N$. Zeige, dass die n-dimensionalen Teilmannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ genau die offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, und die nulldimensionalen Teilmannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ genau die diskreten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind.

Bemerkung: Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt diskret, falls zu jedem Punkt $p \in M$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit $M \cap B_\epsilon(p) = \{p\}$.

Lösung:

Sei zunächst $M \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Dann erfüllt für jeden Punkt $p \in M$ die Identitätsabbildung $\phi_p = id : M \to M$ die Definition einer n-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Sei nun M als n-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ vorausgesetzt und $p \in M$. Wähle einen Diffeomorphismus $\phi_p : U_p \to V_p$ wie in der Definition einer Teilmannigfaltigkeit. Konkret bedeutet dies in dieser Situation, dass U_p eine offene Umgebung von p ist mit $\phi_p(U_p \cap M) = V_p$. Aus der Bijektivität von ϕ_p folgt hieraus direkt $U_p \subset M$. Somit ist M offen in $\mathbb{R}^n$.

Als nächstes sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Teilmenge und $p \in M$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $M \cap B_\epsilon(p) = \{p\}$. Wir setzen $U_p := B_\epsilon(p)$, $V_p := B_\epsilon(0)$ und definieren $\phi_p : U_p \to V_p$ durch $\phi_p(x) = x - p$. Dann ist ϕ_p ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und es gilt nach Konstruktion $\phi_p(U_p \cap M) = \phi_p(\{p\}) = \{0\}$. Dies zeigt, dass M eine nulldimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist. Sei nun M eine nulldimensionale Teilmannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann gibt es nach Definition eine offene Umgebung U_p von p, eine offene Teilmenge V_p von $\mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $\phi_p : U_p \to V_p$ mit $\phi_p(U_p \cap M) = \{0\}$. Aufgrund der Bijektivität von p besteht $U_p \cap M$ also aus genau einem Punkt. Da p sicherlich in diesem Schnitt enthalten ist, muss $U_p \cap M = \{p\}$ gelten. Es bleibt $\epsilon > 0$ so zu wählen, dass $B_\epsilon(p) \subset U_p$ gilt (was möglich ist aufgrund der Offenheit von U_p). Damit ist M als diskret nachgewiesen.