Ferienkurs Analysis 2 — **Technische Universität München**

SoSe 2019 — P.Krause, K. Schweizer

Übungsblatt 3 — 25.09.2019

Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld $f(x, y, z) = (-xy, x^2, z^3)$ und $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ der Weg $\gamma(t) = (\cosh(t), \sinh(t), 1)$. Berechne den Wert des Wegintegrals

$$\int_\gamma f ds.$$

Aufgabe 2

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x, y) = x + y$. Was ist der Wert des Wegintegrals $\int_\gamma f ds$ von f über den Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 0)$?

Aufgabe 3

Sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und der Weg $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

(a)

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y}\cos(xy) - ye^{x+y}\sin(xy) \\ e^{x+y}\cos(xy) - xe^{x+y}\sin(xy) \end{pmatrix}, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 + t^{13} \\ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\sqrt[17]{t} \end{pmatrix}$$

(b)

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy + e^x \\ x^2 \end{pmatrix}, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \log(t^{10}+1) \\ e^{t^{10}-1} \end{pmatrix}$$

Was ist der Wert des Wegintegrals $\int_\gamma F dt$ von F entlang γ?

Aufgabe 4

Eine **Schlaufe** in einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Weg $\gamma : [0, 1] \to U$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$. Zeige, dass ein stetiges Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}^n$ genau dann konservativ ist, wenn für jede stückweise stetig differenzierbare Schlaufe γ in U

$$\int_\gamma F dt = 0$$

gilt.

Aufgabe 5

Welche der folgenden Vektorfelder sind konservativ? Begründe deine Antwort.

(a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} -y^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$

(b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$

(c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$

(d) $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} -\sin(x)\sin(y) \\ \cos(x)\cos(y) \end{pmatrix}$

Aufgabe 6

Sei $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \big| \, |x| < \frac{\pi}{2}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ und $F : U \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y + y\tan^2(x) + \cos(z) \\ \tan(x) \\ -x\sin(z) \end{pmatrix}$$

Ist F konservativ? Falls ja, gib ein Potential von F an.

Aufgabe 7

Sind die folgenden Vektorfelder konservativ? Wenn ja, gib das Potential an.

(a) $f(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^3y \end{pmatrix}$

(b) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2y \\ x^3+1 \\ 9z^2 \end{pmatrix}$

(c) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy \\ z+x^2 \\ y \end{pmatrix}$

(d) $f(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

(e) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \\ z \\ y-1 \end{pmatrix}$

(f) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} z\cos(xz)+y \\ x \\ x\cos(xz) \end{pmatrix}$

(g) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$

(h) $f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^3+1 \\ 3x^2y^2-2y \end{pmatrix}$

(i) $f(x,y) = \begin{pmatrix} x\sin(y) \\ -y\sin(x) \end{pmatrix}$

(j) $f(x,y) = \begin{pmatrix} x\sin(y)+1 \\ \frac{x^2\cos(y)}{2} \end{pmatrix}$

Aufgabe 8

Berechne die Divergenz der folgenden Vektorfelder.

(a) $f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(b) $f(x,y) = \begin{pmatrix} y^3 \\ xy \end{pmatrix}$

(c) $f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ -6xy \end{pmatrix}$

(d) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2z \\ -y \end{pmatrix}$

(e) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{4y}{x^2} \\ \sin(y) \\ 3 \end{pmatrix}$

(f) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^x \\ \ln(xy) \\ e^{xyz} \end{pmatrix}$

Aufgabe 9

Berechne die Rotation der folgenden Vektorfelder.

(a) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$

(b) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^3 \\ xy \\ -z \end{pmatrix}$

(c) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(d) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2z \\ -y \end{pmatrix}$

Aufgabe 10

Es sei M die 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^4 + xy + 2y^2 = 4\}$$

von $\mathbb{R}^2$. Der Tangentialraum von M im Punkt $p = (1,1) \in M$ ist gegeben durch $T_pM = \{p\} \times \mathbb{R}v$ für den Vektor

○ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

○ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

○ $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

○ $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 11

Gegeben sei die Teilmannigfaltigkeit

$$M\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y = 0\}$$

Bestimme eine Basis für den Tangentialraum T_pM bei $p = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$. Bestimme zudem eine Basis des Raums der Normalvektoren $(T_pM)^\perp$ an M bei p.

Aufgabe 12

Sei $n \in N$. Zeige, dass die n-dimensionalen Teilmannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ genau die offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, und die nulldimensionalen Teilmannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ genau die diskreten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind.

Bemerkung: Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt diskret, falls zu jedem Punkt $p \in M$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit $M \cap B_\epsilon(p) = \{p\}$.