Übungsblatt 2 24.09.2019

Aufgabe 1

Finde für die folgenden Funktionen $f(x,y)$ die Extremalstellen (x,y) und charakterisiere sie mit Hilfe der zweiten Ableitung. Begründe, falls der Test mit der zweiten Ableitung uneindeutig ist.

(a) $f(x,y) = x^3 + y^2 - 3x + 6y$

(b) $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - 2y^3 - 4x + 6y - 5$

(c) $f(x,y) = x^4 - 8xy + 2y^2 - 3$

(d) $f(x,y) = 3x^2 - 6xy + y^3 - 9y$

(e) $f(x,y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$

(f) $f(x,y) = 2x^2 - x^4 - y^2$

(g) $f(x,y) = ye^x - 3x - y + 5$

(h) $f(x,y) = x^2 + 4xy + 2y^4$

Lösung:

(a) Für die Extremalstellen gilt $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3 = 0$, also $x = \pm 1$, und $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 6 = 0$, also $y = -3$. Daher sind die Extremalstellen: $(1,-3)$, $(-1,-3)$. Außerdem $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$. Also

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12x.$$

Am Punkt $(1,-3)$, $D = 12 > 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 > 0$, woraus folgt, dass es sich um ein lokales Minimum handelt. Am Punkt $(-1,-3)$, $D = -12 < 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 > 0$, woraus folgt, dass es sich um einen Sattelpunkt handelt.

(b) Wegen $\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 - 4 = 0$ folgt $x = \pm 2$. Weiterhin wegen $\frac{\partial f}{\partial y} = -6y^2 + 6 = 0$ folgt $y = \pm 1$. Also sind die Extremalstellen bei $(-2,-1)$, $(-2,1)$ $(2,-1)$ $(2,1)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$
$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x(-12y) - 0 = -24xy$$

$(-2,-1):\ D = -24(-2)(-1) < 0$, ein Sattelpunkt,
$(-2,1):\ D = -24(-2)(1) > 0$, und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4 < 0$, ein lokales Maximum,
$(2,-1):\ D = -24(2)(-1) > 0$, und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 > 0$, ein lokales Minimum,
$(2,1):\ D = -24(2)(1) < 0$, ein Sattelpunkt.

(c) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 8y = 0 \quad (1), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -8x + 4y = 0 \implies y = 2x \quad (2)$
Durch Einsetzen von *(2)* in *(1)* folgt $4x^3 - 16x = 0, \quad 4x(x^2-4) = 0, \quad x = 0, -4, 4.$
Mit *(2)* finden wir die zugehörigen für y: $y = 0, -4, 4$. Also haben wir die Extremalstellen $(0,0)$, $(-2,-4)$, $(2,4)$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -8$.
Also $D = (12x^2)(4) - (-8)^2 = 48x^2 - 64$.
$(0,0): \quad D < 0$, also ein Sattelpunkt,
$(-2,-4): \quad D = 48(4) - 64 > 0$, und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 > 0$, also ein lokales Minimum,
$(2,4): \quad D = 48(4) - 64 > 0$, und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 > 0$, also ein lokales Maximum.

(d) $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 6y = 0 \quad (1), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -6x + 3y^2 - 9 = 0 \quad (2)$
Mit *(2)*, $y^2 - 2y - 3 = 0$, also $(y-3)(y+1) = 0$, woraus folgt, dass $y = -1, 3$.
Mit *(1)*, $x = y$, womit für Extremalstellen folgt: $(-1,-1)$ und $(3,3)$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6.$
und damit $D = 6(6y) - 36 = 36y - 36$
$(-1,-1):\ D = -72 < 0$, also ein Sattelpunkt,
$(3,3):\ D = 36(3) - 36 > 0$, und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6 > 0$, also ein lokales Minimum.

(e) $\frac{\partial f}{\partial x} = 6y^2 - 6x^2 = 0 \qquad (1), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 12xy + 12y^3 = 0 \qquad (2)$
Aus *(1)*, $x^2 = y^2$, also $x = \pm y$. Durch Einsetzen in *(2)*

Falls $x = y$	Falls $x = -y$
$12y^2 - 12y^3 = 0$	$-12y^2 - 12y^3 = 0$
$12y^2(1-y) = 0$	$-12y^2(1+y) = 0$
also $y = 0 \mid$ oder $y = 1$	also $y = 0 \mid$ oder $y = -1$
also $x = 0 \mid$ oder $x = 1$	also $x = 0 \mid$ oder $x = 1$

Also sind die Extremalstellen $(0,0)$, $(1,-1)$, $(1,1)$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12x - 36y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -12y$
und damit $D = -12x(12x - 36y^2) - (12y)^2 = 144[-x^2 + 3xy^2 - y^2]$
$(0,0): \quad D = 0$, also uneindeutig,
$(1,-1): \quad D = 144[-1 + 3 - 1] = 144 > 0$, und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12 < 0$, also ein lokales Minimum,
$(1,1): \quad D = 144 > 0$, und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12 > 0$, also ein lokales Maximum.

(f) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 4x^3 = 0$, also $4x(1 - x^2) = 0 \implies x = 0, \pm 1. \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0$, also $y = 0$.
Damit sind die Extremalstellen $(-1,0)$, $(0,0)$ $(1,0)$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 - 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$
$D = (4 - 12x^2)(-2) - 0 = 8(3x^2 - 1).$
$(0,0): \quad D = -8 < 0$, Sattelpunkt,
$(-1,0): \quad D = 16 > 0$, und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$, also ein lokales Maximum,
$(1,0): \quad D = 16 > 0$, und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$, also ein lokales Maximum.

(g) $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^x - 3 = 0$, also $ye^x = 3 \qquad (1), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = e^x = 1$, also $x = 0$. Einsetzen in (1) liefert $y = 3$, woraus die Extremalstelle $(0,3)$ ausgerechnet wird.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ye^x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^x.$
Also $D = 0 - (e^x)^2 = -e^{2x}$.
$(0,3): \quad D = -1 < 0$, Sattelpunkt.

(h) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4y = 0, \qquad (1), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x + 8y^3 = 0, \quad (2)$ also $x = 0$. Einsetzen von (1) in (2) liefert
$-8y + 8y^3 = 0$, also $y(-1 + y^2) = 0$, wodurch $y = 0, \pm 1$ und somit folgen die Extremalstellen $(0,0)$, $(2,-1)$, $(-2,1)$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 24y^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = .$
$D = 48y^2 - 16.$
$(0,0): \quad D < 0$, Sattelpunkt,
$(-2,1): \quad D = 48 - 16 > 0$, und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$, also ein lokales Minimum,
$(2,-1): \quad D = 48 - 16 > 0$, und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$, also ein lokales Minimum.

Aufgabe 2

Berechne mit Hilfe von Lagrange Multiplikatoren das Maximum der Funktion $x^2 + xy - 3y^2$ unter der Bedingung, dass $x + 2y = 2$.

Lösung:

Sei $f(x,y) = x^2 + xy - 3y^2$ und die Bedingung $g(x,y) = x + 2y - 2 = 0$. Es folgt:
$F(x,y,\lambda) = x^2 + xy - 3y^2 - \lambda(x + 2y - 2)$
$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + y - \lambda = 0,$
$\frac{\partial F}{\partial y} = x - 6y - 2\lambda = 0$, also $\lambda = \frac{x}{2} - 3y$.
Damit ergibt sich $2x + y = \frac{x}{2} - 3y$, also $\frac{3}{2}x = -4y$, womit $x = -\frac{8y}{3}$. Einsetzen in die Randbedingung

liefert $-\frac{8y}{3}+2y=2$, also $-8y+6y=6$, womit $y=-3$ und $x=8$ folgen.
Damit ist das bedingte Maximum bei $(8,-3)$ und es ist $x^2+xy-3y^2=13$.

Aufgabe 3

Ein rechteckiger, bezäunter Garten soll in einem großen Grundstück errichtet werden. Die Zäune für die Nord- und Südseite kosten 15 € pro Meter Zaun, während die Ost- und Westseite nur 10 € kostet. Wie groß kann der Garten höchstens sein, wenn ein Gesamtbudget von 480 €zur Verfügung steht?

Lösung:

Wir nennen x die Länge der Nord- und Südseite und y die der Ost- und Westseite. Unser Ziel ist es die Fläche xy zu maximieren. Dabei müssen wir die Funktion $10(2x)+15(2y)=480$ befriedigen.
$F(x,y,\lambda)=xy-\lambda(20x+30y-480)$,
$\frac{\partial F}{\partial x}=y-20\lambda=0$, also $\lambda=y/20$
$\frac{\partial F}{\partial y}=x-30\lambda=0$, also $\lambda=x/30$
Daraus folgt $\frac{x}{30}=\frac{y}{20}$ und damit $x=\frac{3}{2}y$. Also $20\left(\frac{3y}{2}\right)+30y=480,\ 30y+30y=480$, also $y=8$ und $x=12$.

Aufgabe 4

Finde die Gleichung der Tangente der Kurve im gegebenen Punkt Punkt:

(a) $y=(x^2-3)^6$ im Punkt $(x,y)=(2,1)$,
(b) $2x^2-y^2=1$ im Punkt $(x,y)=(-1,-1)$,
(c) $\sin(x)+\sin(y)-3y^2=0$ im Punkt $(x,y)=(\pi,0)$,
(d) $(x-y)^3-x^3+y^3=0$ im Punkt $(1,1)$,
(e) $2x+xy+y^2=0$ im Ursprung $(0,0)$.

Lösung:

(a) $y-1=24(x-2)$, oder $24x-y-47=0$.
(b) $y+1=2(x+1)$, oder $2x-y+1=0$.
(c) $y=x-\pi$. Die Ableitung ist $\cos x+y'\cos y-6yy'=0$. Setze $x=\pi$, $y=0$ und löse für y'.
(d) $y=x$. In (1,1) gilt $y'=1$, also $y-1=1(x-1)$ und damit das Ergebnis.
(e) Die Vertikale durch den Ursprung: $x=0$ (also die y-Achse). In dem Fall ist $(x+2y)y'+(2+y)=0$. Die Ableitung ist nicht definiert (oder unendlich) in $x=0$.

Aufgabe 5

Verwende die implizite Ableitung um die gesuchte Ableitung der Funktionen zu finden:

(a) $\frac{dy}{dx}$ im Punkt $(0,16)$ der Funktion $\sqrt{x+y}+x^2y^2$,
(b) $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dx}{dy}$ der Funktion $2xy^2-y^4=x^3$.

Lösung:

(a) Die implizite Ableitung gibt $\frac{1+y'}{2\sqrt{x+y}}+2xy^2+2x^2yy'=0$. Also folgt für $(0,16)$ $y'=-1$.
(b) $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-2y^2}{4xy-4y^3}$, $\frac{dx}{dy}=\frac{4yx-4y^3}{3x^2-2y^2}$.

Aufgabe 6

Sei $n\in\mathbb{N}$ und $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion, für welche ein $\alpha>0$ existiert mit

$$||f(x)-f(y)||_2\geq\alpha||x-y||_2$$

für alle $x,y\in\mathbb{R}^n$. Zeige, dass f ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus ist.

Lösung:

Die Injektivität von f folgt direkt aus der Ungleichung aus der Aufgabenstellung. Wir beweisen nun, dass für $x \in \mathbb{R}^n$ auch das Differential $Df(x)$ injektiv ist. Wäre das nicht der Fall, so gäbe es einen Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\partial_v f(x) = Df(x)(v) = 0.$$

Dann wäre aber nach Definition der Richtungsableitung

$$0 = \lim_{s \to 0} \frac{||f(x+sv) - f(x)||_2}{|s|} \leq \lim_{s \to 0} \frac{\alpha|s|\,||v||_2}{|s|} = \alpha,$$

ein Widerspruch. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass $Df(x)$ damit sogar invertierbar ist, und damit, dass $f(\mathbb{R}^n)$ offen und $f : \mathbb{R}^n \to f(\mathbb{R}^n)$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus ist.
Es bleibt zu zeigen, dass f surjektiv ist. Dazu reicht es nachzuweisen, dass $f(\mathbb{R}^n)$ auch abgeschlossen ist. (Weil $\mathbb{R}^n$ zusammenhängend ist, ist eine nichtleere, offene, abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ notwendigerweise ganz in $\mathbb{R}^n$.) Sei also $(x_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$, sodass die Bildfolge $(f(x_n))_n$ konvergiert. Wir müssen zeigen, dass der Grenzwert auch im Bild von f liegt, also dass ein $x \in \mathbb{R}^n$ existiert mit $f(x_n) \to f(x)$ für $n \to \infty$ Dies folgt wieder aus der Ungleichung der Aufgabenstellung: Als konvergente Folge ist $(f(x_n))_n$ insbesondere eine Cauchy-Folge, und aufgrund der Ungleichung

$$||x_n - x_m||_2 \leq \alpha^{-1}||f(x_n) - f(x_m)||_2$$

für $m, n \in \mathbb{N}$ ist dann auch $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge, also wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}^n$ konvergent. Bezeichnen wir den Grenzwert mit x, so folgt mit der Stetigkeit von f direkt

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n).$$

Dies beweist die Abgeschlossenheit des Bildes $f(\mathbb{R}^n)$, und wie oben erklärt folgt daraus die Surjektivität von f.

Aufgabe 7 Kugelkoordinaten

Die Abbildung $\Phi :\ (0,\infty) \times (0,\pi) \times (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

charakterisiert die Kugelkoordinaten. Skizziere einige Bilder der Abbildungen $r \mapsto \Phi(r,\theta_0,\varphi_0)$, $\theta \mapsto \Phi(r_0,\theta,\varphi_0)$ und $\varphi \mapsto \Phi(r_0,\theta_0,\varphi)$ bei ein paar Werten $r_0 \in (0,\infty)$, $\theta_0 \in (0,\pi)$, $\phi_0 \in (-\pi,\pi)$.
Zeige, dass $\det(D\Phi(r,\theta,\varphi)) = r^2 \sin(\theta)$ gilt

Lösung:

$$D\Phi(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(D\Phi(r,\theta,\varphi)) &= \sin\theta\cos\varphi r\cos\theta\sin\varphi \cdot 0 + r\cos\theta\cos\varphi r\sin\theta\cos\varphi\cos\theta \\ &+ (-r)\sin\theta\sin\varphi\sin\theta\sin\varphi(-r)\sin\theta - \cos\theta r\cos\theta\sin\varphi(-r)\sin\theta\sin\varphi \\ &- (-r)\sin\theta r\sin\theta\cos\varphi\sin\theta\cos\varphi - 0 \cdot \sin\theta\sin\varphi r\cos\theta\cos\varphi = r^2\sin\theta \end{aligned}$$

Aufgabe 8

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

ist...

◯ ...positiv definit.
√ **...negativ definit.**
◯ ...indefinit.
◯ keins der obigen.

Lösung:

Aus $\det(A) = -1 < 0$, $\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 1 > 0$ und $\det(A) = -1 < 0$ folgt, dass A negativ definit ist.