Ferienkurs Analysis 2 | **Technische Universität München**
SoSe 2019 | P.Krause, K. Schweizer

Übungsblatt 1 — 23.09.2019

Aufgabe 1

Sei X ein metrischer Raum. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

$\surd$ **Falls $U \subseteq X$ offen und nicht leer, so ist U nicht kompakt.**

◯ Die leere Teilmenge $\emptyset \subseteq X$ ist kompakt.

◯ Falls $U \subseteq X$ nicht beschränkt ist, so ist U nicht kompakt.

◯ Jede nicht leere endliche Teilmenge $F \subseteq X$ ist kompakt.

Aufgabe 2

Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $A \subseteq X$ eine nicht leere Teilmenge. Zu $x \in X$ definieren wir

$$f_A(x) = \inf\{d(x, a) | a \in A\}$$

Zeige, dass die Funktion $f_A : X \to \mathbb{R}$ stetig ist, und dass $A \subseteq X$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $A = \{x \in X | f_A(x) = 0\}$.

Lösung:

Wir zeigen, dass f_A 1-lipschitz ist. Es gilt

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

für alle $x, y \in X$ und jedes $a \in A$. Somit gilt: $f_a(x) \leq d(x, y) + f_A(y)$ für alle $x, y \in X$, und (nach Vertauschen von x und y) auch $f_A(y) \leq d(x, y) + f_A(X)$. Daraus folgt

$$|f_A(x) - f_A(y)| \leq d(x, y)$$

für alle $x, y \in X$, und f_A ist nach Definition 1-Lipschitz. Sei nun A abgeschlossen. Wir wollen zeigen, dass $A = \{x \in X : f_A(x) = 0\} = f_A^{-1}(0)$. Ist $a \in A$, dann gilt $f_A(a) = 0$, so dass $A \subseteq f_A^{-1}(0)$. Umgekehrt sei $x \in f_A^{-1}(0)$, d.h. $\inf\{d(x, a) : a \in A\} = 0$. Es gilt also eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$, so dass $d(x, a_n) \to 0$ für $n \to \infty$. Weil A abgeschlossen ist, ist $x = \lim_n a_n \in A$. Ist $A = f_A^{-1}(0)$, dann ist A als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\} \subset \mathbb{R}$ unter der stetigen Abbildung f_A ebenfalls abgeschlossen. Hier haben wir das folgende Lemma verwendet:

Lemma: Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann ist für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq Y$ auch ihr Urbild $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

Beweis: Sei $A \subseteq Y$ abgschlossen. Dann ist $U = Y \setminus A$ offen, und $A = X \setminus U$. Es gilt

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus U) = Xf^{-1}(U)$$

Weil f stetig ist, ist $f^{-1}(U)$ offen und somit $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y, z) = e^{xyz}$. Was ist $\partial_x\partial_y\partial_z f(x, y, z)$?

◯ e^{xyz}

◯ $xyze^{xyz}$

◯ $xye^{xyz} + xze^{xyz} + yze^{xyz}$

$\surd$ $e^{xyz} + 3xyze^{xyz} + x^2y^2z^2e^{xyz}$

Aufgabe 4

Zeige, dass die folgenden Funktionen überall differenzierbar sind und bestimmen Sie deren Jacobi-Matrix.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y))(x^2 - y^2, 2xy)$

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (\sin(xyz), z^2 \cos(xy^2))$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, f(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$

(e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \sin(x)e^y + 3x^3y^5$

(f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

(g) $f : \{(x,y,z) \in \mathbb{R} | z \neq -1\} \to \mathbb{R}^2, f(x,y,z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right)$

Lösung:

Für eine deifferenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist die Ableitung an der Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Bezüglich der kanonischen Basen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ ist die Abbildungsmatrix von $Df(x)$ die Jacobi-Matrix, welche wir der Einfachheit wegen ebenfalls mit $Df(x) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ bezeichnen.

Zur Berechnung der Jacobimatrix werden wir die Formel $[Df(x)]_{i,j} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ verwenden. Des Weiteren haben wir in der Vorlesung gesehen, dass eine Funktion f stetig differenzierbar ist, falls alle ihre partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existieren und stetig sind. Insbesondere ist eine Funktion f mit stetigen partiellen Ableitungen überall differenzierbar.

(a) $Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$

(b) $Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz\cos(xyz) & xz\cos(xyz) & xy\cos(xyz) \\ -y^2z^2\sin(xy^2) & -2xyz^2\sin(xy^2) & 2z\cos(xy^2) \end{pmatrix}$

(c) $Df(x,y) = (8x^3 - 6xy, 2y - 3x^2)$

(d) $Df(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$

(e) $Df(x,y) = (\cos(x)e^y + 9x^2y^5, \sin(x)e^y + 15x^3y^4)$

(f) $Df(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$

(g) $Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+z} & 0 & \frac{-x}{(1+z)^2} \\ 0 & \frac{1}{1+z} & \frac{-y}{(1+z)^2} \end{pmatrix}$

Aufgabe 5

Es seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Funktionen definiert durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x\cos(y) \\ x\sin(y) \\ x^2 \end{pmatrix} \qquad g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 - y^2 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Berechne das Differential $D(g \circ f) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ auf zwei Arten:

(a) indem zuerst explizit die Komposition $g \circ f$ berechnet und abgeleitet wird.

(b) unter Verwendung der Kettenregel.

Lösung:

Die Jacobi-Matrix von $g \circ f$ ist:

$$D(g \circ f)(x,y) = \begin{pmatrix} -2x\sin^2(y) & -2x^2\cos(y)\sin(y) & 0 \\ \sin(y) & x\cos(y) & 0 \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $x_0 \in U$ ein Punkt mit $Df(x_0) = 0$. Angenommen es gibt Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$ und $w \in \mathbb{R}^n$ so, dass

$$D^2 f(x_0)(v, v) < 0 \qquad D^2 f(x_0)(w, w) > 0$$

gilt. Die Schreibweise $D^2 f(x_0)(v, w)$ bedeutet $\langle v, H(x_0)w\rangle$. Was bedeutet dies für die Hesse Matrix von f bei x_0?

Lösung:

Wir wissen aus der Vorlesung, dass für die Hesse-Matrix $H(x_0)$ von der Funktion f an der Stelle x_0 gilt, dass

$$D^2 f(x_0)(v, w) = \langle v, H(x_0)w\rangle$$

für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$. Nach der Voraussetzung gibt es $v, w \in \mathbb{R}^2$, sodass

$$D^2 f(x_0) f(v, v) = \langle v, H(x_0)v\rangle < 0$$

und

$$D^2 f(x_0)(w, w) = \langle w, H(x_0)w\rangle > 0$$

Damit ist $H(x_0)$ indefinit.

Aufgabe 7

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Zeige, dass f auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist.

(b) Zeige, dass f nicht stetig differenzierbar ist.

Lösung:

(a) Für $(x, y) \neq (0, 0)$ sind die partiellen Ableitungen von f gegeben durch

$$\partial_x f(x, y) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$
$$\partial_y f(x, y) = 2y \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

Da diese auf $\mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ stetig sind, ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ differenzierbar. Wir zeigen direkt mit der Definition, dass f im Ursprung differenzierbar ist mit $Df(0, 0) = 0$. Denn es gilt:

$$\frac{|f(x, y) - f(0, 0)|}{\|(x, y)\|_2} = \sqrt{x^2 + y^2}\left|\sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)\right| \leq \|(x, y)\|_2$$

und die rechte Seite strebt gegen 0 für $(x, y) \to (0, 0)$

(b) Wenn f stetig differenzierbar wäre, so wären auch alle partiellen Ableitungen stetig. Denn es gilt zum Beispiel $\partial_x f(x, y) = Df(x, y)e_x$ wobei e_x der Einheitsvektor in x-Richtung ist, und die Stetigkeit der Abbildung $Df(x, y)$ bezüglich der Operatornorm impliziert die Stetigkeit der Abbildung $Df(x, y)e_x$. Allerdings folgt mit der Rechnung aus dem ersten Teil für $x \neq 0$

$$\partial_x f(x, 0) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

und diese Funktion konvergiert nicht gegen 0 für $x \to 0$. Somit ist $\partial_x f$ im Ursprung unstetig und f ist im Ursprung nicht stetig differenzierbar.

Aufgabe 8

Sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $\Phi(x) > 0$ für $x \in (1,2)$ und $\Phi(x) = 0$ für $x \notin (1,2)$ und definiere

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y) := \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}\,\Phi\left(\frac{y}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

(a) Zeige, dass f überall stetig und auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ differenzierbar ist.

(b) Zeige, dass alle Richtungsableitungen von f im Ursprung gleich null sind und trotzdem f im Ursprung nicht differenzierbar ist.

Lösung:

(a) Wir zeigen zunächst, dass die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad g(x,y) := \begin{cases} \Phi\left(\frac{y}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ differenzierbar ist. Auf der Teilmenge $U_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0\}$ ist die Abbildung

$$h : U_0 \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \to \frac{y}{x^2}$$

wohldefiniert und stetig differenzierbar. Da $g = \Phi \circ h$ auf U_0 gilt, folgt aus der Kettenregel, dass g auf U_0 differenzierbar ist.
Betrachte als Nächstes einen Punkt $(0, y_0)$ mit $y_0 > 0$ und die Umgebung

$$U_{y_0}^+ := \left(\frac{-1}{2}\sqrt{y_0}, \frac{1}{2}\sqrt{y_0}\right) \times \left(\frac{y_0}{2}, 2y_0\right)$$

Dann sieht man, dass für alle Punkte $(x,y) \in U_{y_0}^+$ die Abbildung $\frac{y}{x^2} \geq 2$ gilt. Insbesondere gilt $g(x,y) = 0$ auf $U_{y_0}^+$ und als konstante Funktion ist g auf $U_{y_0}^+$ differenzierbar.
Betrachte schießlich einen Punkt $(0, y_0)$ mit $y_0 < 0$ und die Umgebung

$$U_{y_0}^- := \mathbb{R} \times \left(2y_0, \frac{1}{2}y_0\right)$$

Dann folgt für alle Punkte $(x,y) \in U_{y_0}^-$ die Abschätzung $\frac{y}{x^2} < 0$ und somit $g(x,y) = 0$. Als konstante Funktion ist g folglich auf $U_{y_0}^-$ differenzierbar.
Da jeder Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ entweder in U_0 oder in einer der Mengen $U_{y_0}^+$, $U_{y_0}^-$ liegt, haben wir gezeigt, dass g überall in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ differenzierbar ist.
Zunächst folgt, dass f als Produkt der differenzierbaren Funktionen $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ und der Funktion g ebenfalls auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ differenzierbar ist. Da Differenzierbarkeit stets Stetigkeit impliziert, ist f in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig und es bleibt die Stetigkeit im Ursprung zu überprüfen.
Betrachte

$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq \sqrt{x^2+y^2} \sup_{t \in [1,2]} |\Phi(t)|$$

Das Supremum auf der rechten Seite ist endlich, da Φ stetig ist, und folglich strebt die rechte Seite gegen 0 für $(x,y) \to (0,0)$. Das zeigt die Stetigkeit von f im Ursprung.

(b) Die Richtungsableitung von f im Ursprung in die Richtung $v = (v_1, v_2)$ ist gegeben durch die Formel

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} f(tv_!, tv_2) = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}\,\Phi\left(\frac{v_2}{tv_1}\right)$$

und für $t \to 0$ strebt der innere Ausdruck $\frac{v_2}{tv_1}$ gegen $\pm\infty$ oder 0, je nachdem welche Vorzeichen v_1 und v_2 haben oder ob $v_2 = 0$ gilt. In jedem Fall gilt aber $\Phi\left(\frac{v_2}{tv_1}\right) = 0$ für alle genügend kleinen t und wir erhalten auch in diesem Fall $\partial_v f(0,0) = 0$.
Falls f im Ursprung differenzierbar wäre mit Ableitung $Df(0,0) = L$, dann gilt für alle partiellen Richtungsableitungen $\partial_v f(0,0) = Lv$. Die obige Rechnung zeigt nun, dass der einzige Kandidat für die Ableitung von f im Ursprung $L(x,y) = 0$ ist. Die Differenzierbarkeit von f ist folglich äquivalent zur Existenz von dem Grenzwert

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - L(0,0)|}{\|(x,y)\|_2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$$

wobei g wie in der vorherigen Teilaufgabe definiert ist. Wir zeigen, dass dieser Grenzwert nicht existiert:
Die Folge $(x'_k, y'_k) := (0, \frac{1}{k})$ und $(x''_k, y''_k) := (\frac{2}{k}, \frac{6}{k^2})$ konvergieren beide gegen $(0,0)$ für $k \to \infty$. Andererseits gilt $g(x'_k, y'_k) = 0$ und $g(x''_k, y''_k) = \Phi(\frac{3}{2} > 0$ für alle k und folglich kann der Grenzwert nicht existieren.

Aufgabe 9

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \exp(x+y)$. Berechnen Sie die totale Ableitung $D^k f(0,0)$ für $k = 1,2,3$, sowie die Taylorentwicklung von f an der Stelle $(0,0)$ bis zum Grad 3.

Lösung:

Sei $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ ein Multiindex. Man berechnet, dass $\partial^\alpha f(x,y) = \exp(x+y)$. Insbesondere ist $\partial^\alpha f(0,0) = 1$. Somit gilt:

$$\begin{aligned}
Df(0,0)(u) &= \sum_{i=1}^{2} \partial_i f(0,0) u_i = u_1 + u_2 \\
D^2 f(0,0) &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \partial_i \partial_j f(0,0) u_i v_j = \sum_{i,j=1}^{2} u_i v_j \\
D^3 f(0,0) &= \sum_{i,j,k=1}^{2} \partial_i \partial_j \partial_k f(0,0) u_i v_j w_k = \sum_{i,j,k=1}^{2} u_i v_j w_k
\end{aligned}$$

für $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$.

Die Taylorentwicklung von f an der Stelle $(0,0)$ bis zum Grad 3 ist demnach

$$\begin{aligned}
T_3(f)(0,0)(x) &= \sum_{|\alpha|=0}^{3} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(0,0) x^\alpha \\
&= 1 + \left(\frac{x_1^1 x_2^0}{1! \cdot 0!} + \frac{x_1^0 x_2^1}{0! \cdot 1!}\right) + \left(\frac{x_1^2 x_2^0}{2! \cdot 0!} + \frac{x_1^1 x_2^1}{1! \cdot 1!} + \frac{x_1^0 x_2^2}{0! \cdot 2!}\right) \\
&+ \left(\frac{x_1^3 x_2^0}{3! \cdot 0!} + \frac{x_1^2 x_2^1}{2! \cdot 1!} + \frac{x_1^1 x_2^2}{1! \cdot 2!} + \frac{x_1^0 x_2^3}{0! \cdot 3!}\right) \\
&= 1 + (x_1 + x_2) + \left(\frac{x_1^2}{2} + x_1 x_2 + \frac{x_2^2}{2}\right) + \left(\frac{x_1^3}{6} + \frac{x_1^2 x_2}{2} + \frac{x_1 x_2^2}{2} + \frac{x_2^3}{6}\right)
\end{aligned}$$

für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

Aufgabe 10

Bestimmen Sie die Taylorpolynome vom Grad 2 für folgende Funktionen

(a) $f(x,y,z) = z e^{\frac{x}{y}}$ an der Stelle $a = (1,1,1)$

(b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ an der Stelle $a = (0,0,0)$

Lösung:

(a) Die partiellen Ableitungen von $f(x,y,z)$ sind gegeben durch

$$\partial_x f = \frac{z}{y} e^{\frac{x}{y}} \qquad \partial_y \frac{-xz}{y^2} e^{\frac{x}{y}} \qquad \partial_z f = e^{\frac{x}{y}}$$

$$\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f = \left(\frac{-z}{y^2} - \frac{xz}{y^3}\right) e^{\frac{x}{y}} \qquad \partial_x \partial_z f = \partial_z \partial_x f = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} \qquad \partial_y \partial_z f = \partial_z \partial_y f = \frac{-x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}$$

$$\partial_x^2 f = \frac{z}{y^2} e^{\frac{x}{y}} \qquad \partial_y^2 f = \left(\frac{2zx}{y^3} + \frac{zx^2}{y^4}\right) e^{\frac{x}{y}} \qquad \partial_z^2 f = 0$$

Damit folgt für die Taylorreihe an der Stelle $a = (1, 1, 1)$:

$$T^2_{f(1,1,1)}(x, y, z) = \dots = e\left(1 + x - y + z + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 - 2xy - yz + xz\right)$$

(b) Die partiellen Ableitungen von $f(x, y, z)$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\partial_x f = 2x - 2yz \qquad \partial_y f = 2y - 2xz \qquad \partial_z f = 2z - 2xy \\
&\partial_x\partial_y f = \partial_y\partial_x f = -2z \qquad \partial_y\partial_z f = \partial_z\partial_y f = -2x \qquad \partial_x\partial_z f = \partial_z\partial_x f = -2y \\
&\partial_x^2 f = 2 \qquad \partial_y^2 = 2 \qquad \partial_z^2 = 2
\end{aligned}$$

Damit folgt für die Taylorreihe an der Stelle $a = (0, 0, 0)$:

$$T^2_{f(0,0,0)}(x, y, z) = \dots = x^2 + y^2 + z^2$$