Ferienkurs Analysis 2 | **Technische Universität München**
SoSe 2019 | P.Krause, K. Schweizer

Übungsblatt 1 | 23.09.2019

Aufgabe 1

Sei X ein metrischer Raum. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

◯ Falls $U \subseteq X$ offen und nicht leer, so ist U nicht kompakt.
◯ Die leere Teilmenge $\emptyset \subseteq X$ ist kompakt.
◯ Falls $U \subseteq X$ nicht beschränkt ist, so ist U nicht kompakt.
◯ Jede nicht leere endliche Teilmenge $F \subseteq X$ ist kompakt.

Aufgabe 2

Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $A \subseteq X$ eine nicht leere Teilmenge. Zu $x \in X$ definieren wir

$$f_A(x) = \inf\{d(x, a) | a \in A\}$$

Zeige, dass die Funktion $f_A : X \to \mathbb{R}$ stetig ist, und dass $A \subseteq X$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $A = \{x \in X | f_A(x) = 0\}$.

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y, z) = e^{xyz}$. Was ist $\partial_x \partial_y \partial_z f(x, y, z)$?

◯ e^{xyz}
◯ $xyze^{xyz}$
◯ $xye^{xyz} + xze^{xyz} + yze^{xyz}$
◯ $e^{xyz} + 3xyze^{xyz} + x^2y^2z^2e^{xyz}$

Aufgabe 4

Zeige, dass die folgenden Funktionen überall differenzierbar sind und bestimmen Sie deren Jacobi-Matrix.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y))(x^2 - y^2, 2xy)$
(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (\sin(xyz), z^2 \cos(xy^2))$
(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$
(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, f(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$
(e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \sin(x)e^y + 3x^3y^5$
(f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$
(g) $f : \{(x, y, z) \in \mathbb{R} | z \neq 1\} \to \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right)$

Aufgabe 5

Es seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Funktionen definiert durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x\cos(y) \\ x\sin(y) \\ x^2 \end{pmatrix} \qquad g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 - y^2 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Berechne das Differential $D(g \circ f) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ auf zwei Arten:

(a) indem zuerst explizit die Komposition $g \circ f$ berechnet und abgeleitet wird.
(b) unter Verwendung der Kettenregel.

Aufgabe 6

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $x_0 \in U$ ein Punkt mit $Df(x_0) = 0$. Angenommen es gibt Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$ und $w \in \mathbb{R}^n$ so, dass

$$D^2f(x_0)(v, v) < 0 \qquad D^2f(x_0)(w, w) > 0$$

gilt. Was bedeutet dies für die Hesse Matrix von f bei x_0?

Aufgabe 7

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Zeige, dass f auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist.

(b) Zeige, dass f nicht stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 8

Sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $\Phi(x) > 0$ für $x \in (1,2)$ und $\Phi(x) = 0$ für $x \notin (1,2)$ und definiere

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y) := \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}\,\Phi\left(\frac{y}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

(a) Zeige, dass f überall stetig und auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ differenzierbar ist.

(b) Zeige, dass alle Richtungsableitungen von f im Ursprung gleich null sind und trotzdem f im Ursprung nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 9

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \exp(x+y)$. Berechnen Sie die totale Ableitung $D^k f(0,0)$ für $k = 1,2,3$, sowie die Taylorentwicklung von f an der Stelle $(0,0)$ bis zum Grad 3.

Aufgabe 10

Bestimmen Sie die Taylorpolynome vom Grad 2 für folgende Funktionen

(a) $f(x,y,z) = ze^{\frac{x}{y}}$ an der Stelle $a = (1,1,1)$

(b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ an der Stelle $a = (0,0,0)$