Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs

Experimentalphysik 1

WS 2018/19

Probeklausur - Lösungen

Cara Zimmermann
Lara Szeimies

Inhaltsverzeichnis

1 Brunnen 2

2 Planeten 3

3 Schwingungen eines schwimmenden Zylinders 4

4 Floß 5

5 Tür 5

6 Transversalwelle 6

7 Baukran 8

8 Billardkugeln 9

1 Brunnen

(Nehmen Sie $g = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ an.)
(a) Vom Rand eines tiefen Brunnens werde ein Stein fallengelassen. Nach $t = \frac{35}{3}\mathrm{s}$ höre man am Brunneneingang den Aufschlag des Steins auf der Wasseroberfläche. Wie tief ist der Brunnen? (Schallgeschwindigkeit $v_S = 300\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$)
(b) Ein zweiter Stein falle wie oben aus der Ruhe in den Brunnen. Eine Sekunde nach Beginn des freien Falls werde ein dritter Stein mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ nachgeworfen.

(i) Berechnen Sie die Zeit t_2, die nach dem Fallbeginn des zweiten Steins vergeht, bis dieser vom dritten Stein überholt wird.

(ii) In welcher Tiefe z_0 findet der Überholvorgang statt?

(iii) Skizzieren Sie den Verlauf der Bewegungen beider Steine in einem Ort-Zeit-Diagramm.

Lösung

(a) Definiert sind Fallzeit des Steins t_1, Laufzeit des Schalls t_S, $t = t_1 + t_\mathrm{S} = \frac{35}{3}\mathrm{s}$ und Schachttiefe $s = \frac{g}{2}t_1^2 = v_\mathrm{S}t_\mathrm{S}$. Damit folgt die Lösung

$$\frac{g}{2}t_1^2 = v_\mathrm{S}t_\mathrm{S} = v_\mathrm{S}(t - t_1) \tag{1}$$

$$0 = \frac{g}{2}t_1^2 - v_\mathrm{S}t + v_\mathrm{S}t_1 \tag{2}$$

Diese quadratische Gleichung lässt sich nach t_1 auflösen. Als einzig physikalisch sinnvolle Lösung muss hierbei die positive Lösung verwendet werden. Es ergibt sich

$$t_1 = 10{,}0\,\mathrm{s} \to t_\mathrm{S} = t - t_1 = \frac{5}{3}\mathrm{s} \tag{3}$$

$$s = v_\mathrm{S}t_\mathrm{S} = 500\,\mathrm{m} \tag{4}$$

(b) Die Fallstrecke des zweiten Steins ist definiert als $z_2 = \frac{g}{2}t^2$, die für den dritten Stein als $z_3 = \frac{g}{2}(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0)$, wobei $t_0 = 1\,\mathrm{s}$ ist.

(i) Bedingung für t_2 ($z_2 = z_3$):

$$\frac{g}{2}t_2^2 = \frac{g}{2}t_2^2 - 2\frac{g}{2}t_2t_0 + \frac{g}{2}t_0^2 + v_0t_2 - v_0t_0 \tag{5}$$

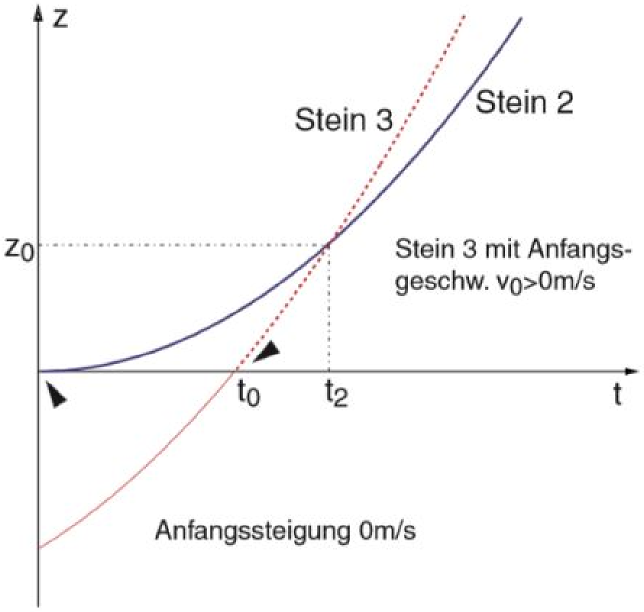
$$t_2 = \frac{\frac{g}{2}t_0^2 - v_0t_0}{gt_0 - v_0} = \frac{3}{2}\mathrm{s}. \tag{6}$$

Zu beachten ist, dass das System nur dann eine physikalisch sinnvolle Lösung hat, wenn $v_0 > gt_0$ gilt.

(ii)

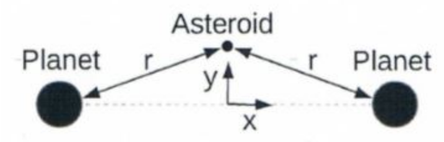
$$z_0 = z_2(t_2) = \frac{g}{2}t_2^2 = \frac{45}{4}\mathrm{m} \tag{7}$$

(iii) (s. Skizze)



2 Planeten

Ein Asteroid der Masse m befinde sich im Schwerefeld zweier Planeten mit jeweils der Masse M. Der Abstand r zu beiden Planeten ist gleich groß.



Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinden sich alle drei Körper in Ruhe. Im Folgenden soll die Bewegung des Asteroiden betrachtet werden. Die Bewegung des Asteroiden erfolgt so schnell, dass die Positionen der Planeten trotz gegenseitiger Anziehung über die betrachtete Zeitskala hinweg näherungsweise konstant sind.
(a) Berechnen Sie den Vektor der auf den Asteroiden wirkenden Gesamtkraft F_{ges} in dem skizzierten Koordinatensystem.
(b) Beschreiben Sie komponentenweise die Bewegungsgleichung für den Asteroiden.
(c) Was ist die Zeitdauer T für eine volle Periode der Bewegung des Asteroiden für den Fall, dass der Abstand y zur Verbindungslinie der Planeten klein im Vergleich zu r ist?

Lösung

(a)

$$\vec{F_{\text{ges}}} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \frac{GmM}{r^3}\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} + \frac{GmM}{r^3}\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\vec{F_{\text{ges}}} = \frac{GmM}{r^3}\begin{pmatrix} 0 \\ -2y \end{pmatrix} = \frac{GmM}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} 0 \\ -2y \end{pmatrix} \tag{9}$$

(b) Bewegungsgleichung in x-Richtung:

$$m\ddot{x} = 0 \tag{10}$$

Bewegungsgleichung in y-Richtung:

$$m\ddot{y} = -Gm\frac{2yM}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{11}$$

(c) Ist die y-Komponente vernachlässigbar klein im Vergleich zu x, so wird die Bewegungsgleichung zu

$$\ddot{y} = -G\frac{2yM}{x^3} \approx -G\frac{2M}{r^3}y = -\omega^{\cdot} \tag{12}$$

Daraus folgt für die Periodendauer T:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{2r^3}{GM}} \tag{13}$$

3 Schwingungen eines schwimmenden Zylinders

Ein Zylinder schwimmt aufrecht stehend in einem Wasserbad (Dichte $\rho_{\mathrm{H_2O}} = 1\frac{g}{cm^3}$). Die Masse des Zylinders beträgt $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$, der Durchmesser ist $d = 0{,}1\,\mathrm{m}$. Wie groß ist die Schwingungsperiode T, wenn man den Zylinder leicht herunter drückt und dann loslässt?

Lösung

Der Zylinder wird um die Strecke $-z_0$ nach unten gedrückt. Auf ihn wirken dann die Gewichtskraft $\vec{F_{\mathrm{G}}} = -mg\vec{e_{\mathrm{z}}}$ und die Auftriebskraft $\vec{F_{\mathrm{A}}} = -\rho Ag(z_0 - z)\vec{e_{\mathrm{z}}}$. Hierbei ist z_0 die Eintauchtiefe, bei der der Zylinder schwimmen würde, also Gewichtskraft und Auftrieb durch das Wasser ausgeglichen sind, und $A = \pi r^2$ die Grundfläche des Zylinders.
Im Gleichgewicht gilt:

$$mg = -\rho Agz_0 \rightarrow z_0 = -\frac{m}{\rho A} \tag{14}$$

$$\vec{F_{\mathrm{A}}} = -\rho Ag(-\frac{m}{\rho A} + z)\vec{e_{\mathrm{z}}}) = (mg - \rho Agz)\vec{e_{\mathrm{z}}} \tag{15}$$

Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{z} = F_{\mathrm{G}} + F_{\mathrm{A}} = -mg + mg - \rho Agz = -\rho Agz \tag{16}$$

$$\ddot{z} + \frac{\rho Ag}{m}z \rightarrow \omega^2 = \frac{\rho Ag}{m} \tag{17}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho Ag}} = 0{,}08\,\mathrm{s} \tag{18}$$

4 Floß

Sie sollen hundert Eisenwürfel aus Eisen mit der Kantenlänge von jeweils 20 cm ($\rho_{\text{Fe}} = 7{,}8\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) auf einem Floß aus Tannenstämmen ($\rho_{\text{Holz}} = 0{,}5\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) flussabwärts transportieren. Wie groß muß das Volumen an Tannenholz sein, um das Floß in Wasser ($\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1\frac{g}{cm^3}$) gerade schwimmend zu halten?
Wie viele Stämme N mit einem Durchmesser von $d = 20\,\text{cm}$ und Länge $L = 5\,\text{m}$ werden benötigt?

Lösung

Bedingung für Schwimmen: Gewicht von Holz und Eisen entspricht dem Gewicht des verdrängten Wassers. Es wird gerade das Wasservolumen verdrängt.

$$V_{\text{Holz}}\rho_{\text{Holz}} + V_{\text{Fe}}\rho_{\text{Fe}} = m_{\text{H}_2\text{O}} = (V_{\text{Holz}} + V_{\text{Fe}})\rho_{\text{H}_2\text{O}} \tag{19}$$

$$V_{\text{Holz}} = V_{\text{Fe}}\frac{\rho_{\text{Fe}} - \rho_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho_{\text{H}_2\text{O}} - \rho_{\text{Holz}}} = 10\,880\,\text{l} \rightarrow m_{\text{Holz}} = \rho_{\text{Holz}}V_{\text{Holz}} = 5440\,\text{kg} \tag{20}$$

$$V_{\text{Stamm}} = \pi r^2 L = 157\,\text{l} \rightarrow N = 70 \tag{21}$$

5 Tür

Die junge Eva rangelt mit ihrem älteren Bruder Paul. Paul versucht eine Tür auf zu drücken und drückt dabei in der Mitte der Tür mit der Kraft $F_P = 80N$. Eva versucht die Tür zu zu drücken am äußeren Ende der Tür mit der Kraft $F_E = 50N$. Beide drücken stets senkrecht auf die Tür. Zum Zeitpunkt t=0 ist die Tür um $\psi = 0,05 rad$ geöffnet und in Ruhe. Reibungskräfte sind zu vernachlässigen.

(a) Geht die Tür aufgrund der wirkenden Kräfte auf oder zu?

(b) Die Tür ist ein dünner Quader aus homogenen Material. Sie hat die Breite b=1m und Masse m=12kg. Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Tür.

(c) Falls Sie bei (a) finden, dass die Tür sich schließt, berechnen Sie die Zeitdauer T bis die Tür geschlossen ist (ψ =0). Falls die Tür sich öffnet, berechnen Sie stattdessen die Zeitdauer T bis die Tür geöffnet ist ($\psi = \frac{\pi}{2}$).

Lösung

(a)
Bestimme resultierendes Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{M_P} + \vec{M_E} = \vec{r_P} \times \vec{F_P} + \vec{r_E} \times \vec{F_E} = -\frac{b}{2} \cdot F_P \cdot \vec{e_Z} + b \cdot F_E \cdot \vec{e_Z} = 10Nm \tag{22}$$

Die Tür geht somit zu.

(b)
Trägheitsmoment

$$I = \int r^2 dm = \int x^2 \rho dx = \rho \int_0^b x^2 dx = \rho \frac{1}{3} b^3 \tag{23}$$

Mit $\rho = \frac{dm}{dx} = \frac{m}{b}$ folgt

$$I = \frac{1}{3} m b^2 = 4kgm^2 \tag{24}$$

(c)
Bewegungsgleichung in Polarkoordinaten:

$$\dot{L}_Z = I\ddot{\psi} = M \tag{25}$$

$$\ddot{\psi} = \frac{M}{I} = \alpha = \frac{10Nm}{4kgm^2} = \frac{5}{2} s^{-2} = konst. \tag{26}$$

Einmaliges Integrieren mit $\dot{\psi}(t = 0) = 0$

$$\dot{\psi} = \alpha \cdot t \tag{27}$$

Zweimaliges Integrieren mit $\psi_0 = 0,05rad$

$$\psi = \frac{1}{2} \alpha t^2 - \psi_0 \tag{28}$$

Somit ergibt sich für die Zeit T bis die Tür geschlossen ist ($\psi = 0$):

$$T = \sqrt{\frac{2\psi_0}{\alpha}} = \frac{1}{5} s \tag{29}$$

6 Transversalwelle

Eine Transversalwelle breitet sich als ebene Welle in einem Medium aus, welches aus Einzelteilchen der Masse $M = 1g$ besteht. Dabei werde die Auslenkung ξ der Teilchen aus der Ruhelage beschrieben durch die Gleichung

$$\xi(x,t) = 0,1m \cdot \sin\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{0,4s} - \frac{x}{4m}\right)\right]$$

1. Berechnen Sie die Wellenlänge λ und die Kreisfrequenz ω dieser Welle.
2. Geben Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Welle an.
3. Welche kinetische Energie E_{kin} hat ein Teilchen bei $x = 0,8m$ nach $t = 4s$?
4. Welchen minimalen Abstand $x_{\min}$ vom Ursprung der Welle $x = 0$ hat ein Teilchen, dessen kinetische Energie im selben Moment (bei $t = 4s$) die Hälfte der Gesamtenergie beträgt?

Lösung

1. Die allgemeine Form einer Wellengleichung ist
$$y(x,t) = y_0 \cdot \sin(\omega t - kx)$$
Durch Koeffizientenvergleich erhält man
$$\omega = \frac{2\pi}{0,4s} = 5\pi s^{-1} = 15,7 s^{-1}$$
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{4m} \Rightarrow \lambda = 4m$$

2. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle ist definiert als
$$c = \lambda f$$
mit $\omega = 2\pi f$ folgt
$$c = \lambda \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4m \cdot 5\pi s^{-1}}{2\pi} = 10\frac{m}{s}$$

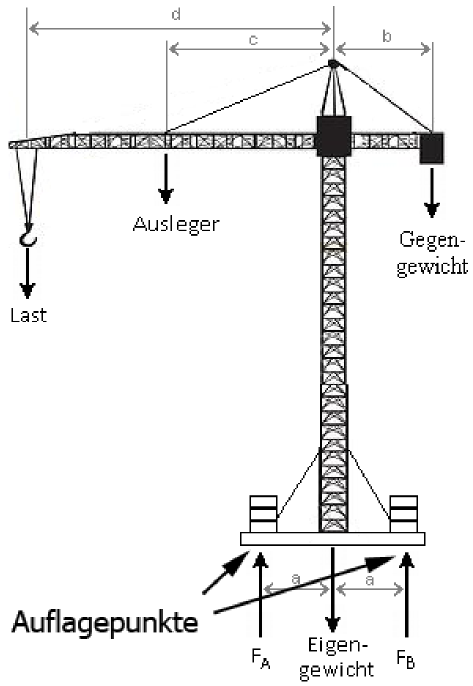
3. Zuerst berechnen wir die *Teilchen*Geschwindigkeit v. Dies ist nicht die *Wellen*geschwindigkeit c, sondern
$$v = \frac{d\xi}{dt} = 0,1m \cdot \cos\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{0,4s} - \frac{x}{4m}\right)\right] \cdot 5\pi s^{-1} = 0,5\pi\frac{m}{s} \cdot \cos\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{0,4s} - \frac{x}{4m}\right)\right]$$
Die kinetische Energie ist dann
$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{8}M\pi^2\frac{m^2}{s^2}\cos^2\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{0,4s} - \frac{x}{4m}\right)\right]$$
Einsetzen der Zahlenwerte liefert
$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{8}\pi^2\frac{kgm^2}{s} \cdot 10^{-3}\cos^2\left[2\pi \cdot \left(\frac{0,4s}{0,4s} - \frac{0,8m}{4m}\right)\right] = 0,12mJ$$

4. Zuerst bestimmen wie die Gesamtenergie eines Teilchens. Diese ist gleich der maximalen kinetischen Energie
$$E_{\text{ges}} = E_{\text{kin, max}} = \frac{M\pi^2}{8}\frac{m^2}{s^2}$$
Also folgt
$$\frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{ges}}} = \cos^2\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{0,4s} - \frac{x}{4m}\right)\right] = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \cos\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{0,4s} - \frac{x}{4m}\right)\right] = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Rightarrow 2\pi \cdot \left(\frac{t}{0,4s} - \frac{x}{4m}\right) = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}(n \in \mathbb{Z})$$
Hier haben wir eine zeit- und ortsabhängige Bestimmungsgleichung für Teilchen passender Energie. Einsetzen von $t = 4s$ und Auflösen nach x liefert
$$x = 39,5m - nm$$
Woraus sofort der minimale Wert für die Ruhelage
$$x_{\text{min}} = 0,5m$$
folgt.

7 Baukran

An dem dargestellten Kran wird eine Last (F_L) von 15 kN angehängt. Wie groß sind die Auflagekräfte (F_A und F_B) am Boden des Krans?
Das Gegengewicht F_G des Krans, das Gewicht des Auslegers F_C, das gesamte Eigengewicht des Krans F_E und die Längen $a - d$ haben folgende Werte:

$F_G = 30$ kN
$F_C = 6$ kN
F_E =20 kN
a=1 m
b=1,2 m
c=1,5 m
d=3,2 m



Lösung

Die einzigen Unbekannten sind die Kräfte F_A und F_B. Um eine der beiden Kräfte ausrechnen zu können, legen wir also den Drehpunkt in den jeweilig anderen Auflagepunkt legen. Zudem gilt Drehmomentengleichgewicht, da sich nichts bewegen darf.

$$\sum M = 0 \qquad \sum F_y = 0 \tag{30}$$

Berechnung von F_A durch Drehpunkt bei F_B

[**2**]

$$0 = M_A + M_L + M_C + M_G + M_E = F_A(a+a) - F_L(d+a) - F_C(c+a) + F_G(b-a) - F_E a \tag{31}$$

[**2**]

$$F_A = \frac{F_L(d+a) + F_C(c+a) - F_G(b-a) + F_E a}{a+a} = 46kN \tag{32}$$

Berechnung von F_B durch Drehpunkt bei F_A

[**1**]

$$0 = M_B + M_G + M_C + M_L = F_B(a+a) - F_G(a+b) + F_C(c-a) + F_L(d-a) - F_E a \quad (33)$$

[**2**]

$$F_B = \frac{F_G(a+b) - F_C(c-a) - F_L(d-a) + F_E a}{a+a} = 25kN \quad (34)$$

[**1**]

Man kann stattdessen natürlich auch alternativ ein Kräftegleichgewicht als eine der Gleichungen aufstellen.

$$-F_G - F_C - F_E - F_L + F_A + F_B = 0 \quad (35)$$

[**1**]

8 Billardkugeln

Wir betrachten im Folgenden Zusammenstöße einer weißen Billardkugel mit einer schwarzen Billardkugel. Die schwarze Billardkugel befindet sich am Anfang aller Teilaufgaben in Ruhe. Beide Kugeln haben die gleiche Masse. Sie können Komplikationen durch Reibung und „Spin" vernachlässigen.

1. Zunächst betrachten wir den Fall, dass beide Kugeln zentral stoßen, sodass die Bewegung vor und nach dem Stoß auf einer geraden Linie (die wir als x-Achse nehmen) liegt. Für den Fall, dass die weiße Kugel vor dem Stoß die Geschwindigkeit $v_{\text{vorher}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ hat und der Stoß vollkommen elastisch ist, was sind die Geschwindigkeiten der weißen und der schwarzen Kugel nach dem Stoß?

2. Jetzt gehen wir von den gleichen Anfangsbedingungen aus wie in Teilaufgabe a, nur dass die weiße Kugel plötzlich aus einem Material besteht, das sich durch den Stoß verklebt, sodass der Stoß vollkommen inelastisch ist und die beiden Kugeln nachher als gemeinsame Kugel doppelter Masse weiterlaufen. Was ist die Geschwindigkeit der neuen schwarz-weißen Kugel? Zeigen Sie, dass bei dem Stoß die kinetische Energie nicht erhalten wird.

3. Jetzt gehen wir wieder von einem vollkommen elastischen Stoß aus, betrachten aber den Fall, dass die Kugeln nicht zentral stoßen. Die Geschwindigkeit der weißen Kugel vor dem Stoß sei wieder $v_{\text{vorher}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$, die Geschwindigkeit der weißen Kugel nach dem Stoß $v_{\text{nachher}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Was ist die Geschwindigkeit der schwarzen Kugel nach dem Stoß?

4. Zeigen Sie, dass bei dem Stoß aus der letzten Teilaufgabe die kinetische Energie erhalten bleibt.

Lösung

1. Elastischer Stoß bedeutet Energie- und Impulserhaltung

$$v_{\text{nachher,weiß}} = \frac{m_{\text{weiß}} - m_{\text{schwarz}}}{m_{\text{weiß}} + m_{\text{schwarz}}} v_{\text{vorher,weiß}} = 0 \tag{36}$$

$$v_{\text{nachher,schwarz}} = \frac{2m_{\text{weiß}}}{m_{\text{weiß}} + m_{\text{schwarz}}} v_{\text{vorher,weiß}} = v_{\text{vorher,weiß}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{37}$$

Dies ist der Fall des „Managerspielzeugs".

2. Vollkommen inelastischer Stoß bedeutet nur Impulserhaltung

$$m_{\text{weiß}} \cdot v_{\text{vorher,weiß}} = m_{\text{gesamt}} \cdot v_{\text{nachher,gesamt}} \tag{38}$$

$$\Rightarrow v_{\text{nachher,gesamt}} = \frac{m_{\text{weiß}}}{m_{\text{gesamt}}} \cdot v_{\text{vorher,weiß}} = \frac{1}{2} v_{\text{vorher,weiß}} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{39}$$

$$E_{kin,\text{vorher}} = \frac{1}{2} m_{\text{weiß}} \cdot v^2_{\text{weiß,vorher}} = \frac{25}{2} m_{\text{weiß}} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} < \frac{1}{2}(2m_{\text{weiß}}) \cdot v^2_{\text{nachher,gesamt}} \tag{40}$$

$$= 6,25 m_{\text{weiß}} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = E_{kin,\text{nachher}} \tag{41}$$

3. Impulserhaltung in x:

$$p_{\text{vorher}} = m_{\text{weiß}} \cdot 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = p_{\text{nachher}} = m_{\text{weiß}} \cdot 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + m_{\text{schwarz}} \cdot v_x \tag{42}$$

$$m_{\text{weiß}} = m_{\text{schwarz}} \tag{43}$$

$$\Rightarrow v_x = 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{44}$$

Impulserhaltung in y:

$$p_{\text{vorher}} = 0! \tag{45}$$

$$p_{\text{nachher}} = m \cdot 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + m \cdot v_y \tag{46}$$

$$\Rightarrow v_y = -2\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{47}$$

$$\text{Somit ist } v_{\text{schwarz}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{48}$$

4.

$$E_{kin,\text{vorher}} = \frac{1}{2} m v^2_{\text{vorher}} = \frac{25}{2} m \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \tag{49}$$

$$\stackrel{!}{=} E_{kin,\text{nachher}} = \frac{1}{2} m (1^2 + 2^2) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + \frac{1}{2} m (4^2 + 2^2) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \tag{50}$$

$$= \frac{5}{2} m \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + \frac{20}{5} m \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \frac{25}{2} m \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \tag{51}$$