

Ferienkurs

Experimentalphysik 1

WS 2018/19

Aufgabenblatt 4

Cara Zimmermann
Lara Szeimies

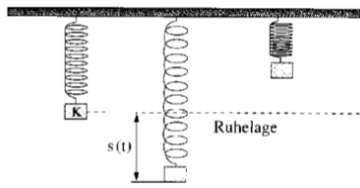
Inhaltsverzeichnis

1	Mechanische Schwingung	2
2	Schwingende Flüssigkeitssäule	3
3	Schwingung einer ausgedehnten Scheibe	5
4	Olive	7
5	Wellenzahlen	8
6	Orgelpfeife	9
7	Transversale Seilwelle	10
8	Überlagerung zweier Schallwellen	12

1 Mechanische Schwingung

Ein Gewicht der Masse m hängt an einer Feder mit der Federkonstanten D . Ist es um die Strecke s aus seiner Ruhelage entfernt, so wirkt die Rückstellkraft F_D . Dabei erfährt das Gewicht eine Beschleunigung a , die die Trägheitskraft $F_M = -ma$ zur Folge hat. Insgesamt muss $F_D + F_M = 0$ gelten.

Bestimme die Periodendauer und die Frequenz der Schwingung, die entsteht, wenn man ein Gewicht der Masse $m = 0,1\text{kg}$ an eine Feder mit $D = 10\frac{\text{N}}{\text{m}}$ um $s_0 = 1\text{cm}$ aus seiner Ruhelage entfernt und dann loslässt.



Lösung

$$F_D + F_M = 0 \quad (1)$$

$$m \cdot \ddot{s}(t) = -D \cdot s(t) \quad (2)$$

$$\ddot{s}(t) = -\frac{D}{m} \cdot s(t) \quad (3)$$

Eine mögliche Lösung dieser Differentialgleichung ist $s(t) = A \cdot \cos(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t)$ mit Amplitude $A = s(0) = 1\text{cm}$.

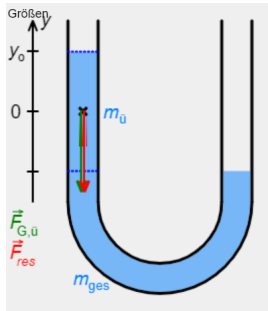
Winkelgeschwindigkeit $w = \sqrt{\frac{D}{m}} = 10\text{s}^{-1}$

Frequenz $f = \frac{w}{2\pi} \approx 1,59\text{s}^{-1}$

Periodendauer $T = \frac{1}{f} = 0,63\text{s}$

2 Schwingende Flüssigkeitssäule

Ein Flüssigkeitspendel, auch bekannt als schwingende Flüssigkeitssäule, ist im Allgemeinen ein U-Rohr, in dem eine anfangs aus der Gleichgewichtslage ausgelenkte Flüssigkeitssäule schwingt. In der Abbildung sieht man den Aufbau des Versuchs.



- (a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung.
Beachten Sie, dass die Flüssigkeitssäule im U-Rohr einen Zylinder darstellt. Die Größen m_{ges} und m_u lassen sich somit durch die Dichte ρ der Flüssigkeit, die Querschnittsfläche A des U-Rohrs, $y(t)$ und der Länge L ausdrücken.
- (b) Die Bewegungsgleichung ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung, die noch zwei Anfangsbedingungen zu ihrer kompletten Lösung erfordert. Gib diese beiden Anfangsbedingungen an.
- (c) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Zeit-Ort-Funktion $y(t) = \bar{y} \cdot \cos(\omega t)$ mit geeignetem ω die Bewegungsgleichung erfüllt.
Gib den geeigneten Term für ω an und bestimme den Wert \bar{y} so, dass diese Zeit-Ort-Funktion auch die beiden Anfangsbedingungen erfüllt.
- (d) Die Flüssigkeitssäule eines Flüssigkeitspendels habe die Länge 50 cm. Berechne die Schwingungsdauer dieses Flüssigkeitspendels.

Lösung

(a)

$$m_{ges} \cdot \ddot{y}(t) = -m_u \cdot g \quad (4)$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{-m_u \cdot g}{m_{ges}} \quad (5)$$

Mit $m_u = \rho \cdot A \cdot 2y(t)$ und $m_{ges} = \rho \cdot A \cdot L$ folgt

$$\ddot{y}(t) = -\frac{2g}{L} \cdot y(t) \quad (6)$$

(b)

Die Anfangsbedingungen lauten $y(0) = y_0$ und $\dot{y}(0) = 0$

(c)

Bestimmen wir die 2. Ableitung $\ddot{y}(t) = -\bar{y} \cdot w^2 \cdot \cos(wt)$ der Zeit-Ort-Funktion und setzen $y(t)$ und $\ddot{y}(t)$ in die Differentialgleichung ein.

$$-\bar{y} \cdot w^2 \cdot \cos(wt) + \frac{2g}{L} \cdot \bar{y} \cdot \cos(wt) = 0 \quad (7)$$

$$-\bar{y} \cdot \cos(wt) \cdot \left(w^2 - \frac{2g}{L}\right) = 0 \quad (8)$$

Die linke Seite der Gleichung ist nur dann immer 0, wenn

$$w^2 - \frac{2g}{L} = 0 \quad (9)$$

und damit ergibt sich $w = \sqrt{\frac{2g}{L}}$

Aus

$$y(0) = y_0 = \bar{y} \cdot \cos(w \cdot 0) \quad (10)$$

ergibt sich $\bar{y} = y_0$

und mit $\dot{y}(t) = -\bar{y} \cdot w \cdot \sin(wt)$

$$\dot{y}(0) = -\bar{y} \cdot w \cdot \sin(w \cdot 0) = 0 \quad (11)$$

Damit wird die Bewegung des Flüssigkeitspendels beschrieben durch die Zeit-Ort-Funktion

$$y(t) = y_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{2g}{L}} \cdot t\right) \quad (12)$$

(d)

Für die Schwingungsdauer T ergibt sich wegen $T = \frac{2\pi}{w}$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2g}{L}}} = 1,0s \quad (13)$$

3 Schwingung einer ausgedehnten Scheibe

Eine zylindrische Scheibe mit einem Radius $r = 0,80\text{m}$ und einer Masse von $m = 6,00\text{kg}$ habe eine homogene Massendichte. In der Entfernung d vom Mittelpunkt der Scheibe befindet sich ein kleines Loch, an dem man die Scheibe aufhängen kann.

1. Wie groß muss d sein, damit die Schwingungsdauer dieses physikalischen Pendels $2,50\text{s}$ beträgt?
2. Wie muss man d wählen, damit die Schwingungsdauer minimal wird? Wie groß ist diese minimale Schwingungsdauer?

Lösung

1. Die Differenzialgleichung dieser Schwingung ergibt sich aus der Betrachtung des wirkenden Drehmoments.

$$|\vec{D}| = |\vec{r} \times \vec{F}| \quad (14)$$

$$= mgd \sin \alpha \quad (15)$$

Das Drehmoment ist gleichzeitig die Ableitung des Drehimpulses $L = I\omega$. Daraus ergibt sich unter der Berücksichtigung, dass das Drehmoment rücktreibend wirkt, folgende DGL:

$$-mgd \sin \alpha = I\ddot{\alpha} \quad (16)$$

Mit der Kleinwinkelnäherung ergibt sich das zu

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgd}{I}\alpha = 0 \quad (17)$$

Es gilt also $\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} = \frac{2\pi}{T}$. Das Trägheitsmoment dieser Anordnung ergibt sich mit dem Satz von Steiner zu $I = \frac{1}{2}mr^2 + md^2$. Setzt man das in ω ein, kann die Gleichung aufgelöst werden zu

$$d^2 - \frac{gT^2}{4\pi^2}d + \frac{r^2}{2} = 0 \quad (18)$$

Diese quadratische Gleichung hat zwei Lösungen. Die eine ($d = 1,31\text{m}$) ist physikalisch nicht sinnvoll, da der Radius der Scheibe nur $0,8\text{m}$ beträgt. Der gesuchte Abstand ist also $d = 24\text{cm}$

2. Für die Periodendauer T ergibt sich folgende Formel:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2}mr^2 + md^2}{mgd}} \quad (19)$$

Die Extrema der Periodendauer lassen sich nun ermitteln, indem man diese Formel nach d ableitet und mit null gleichsetzt.

$$\frac{2d^2 - (\frac{1}{2}r^2 + d^2)}{\sqrt{gd^2}} = 0 \quad (20)$$

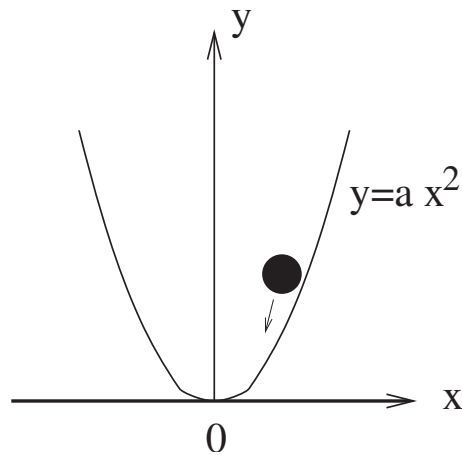
Es ist ausreichend, den Zähler der linken Seite zu beachten, $2d^2 - (\frac{1}{2}r^2 + d^2) = 0$. Daraus ergibt sich $d_{\min} = \frac{r}{\sqrt{2}}$. Dies setzen wir wieder in den Ausdruck für die Periodendauer ein und erhalten

$$T_{\min} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2}r^2 + d_{\min}^2}{gd_{\min}}} \quad (21)$$

$$= 2,1\text{s} \quad (22)$$

Um mathematisch korrekt zu zeigen, dass dieser Wert ein Minimum und kein Maximum ist, müsste nun entweder der Graph oder die zweite Ableitung betrachtet werden. Das soll für uns aber in diesem Fall als gegeben betrachtet werden.

4 Olive



Eine Olive (Masse m) wird in ein parabelförmiges Glas fallen gelassen ($y = ax^2$) und beginnt reibungsfrei in x -Richtung hin- und herzuschwingen. Den Nullpunkt des Koordinatensystems liegt im tiefsten Punkt des Glases.

1. Wie groß ist die potentielle Energie $U(x)$ der Olive?
2. Berechnen Sie aus $U(x)$ die Rückstellkraft und leiten Sie die Differentialgleichung für die Bewegung der Olive in x -Richtung her.
3. Mit welcher Kreisfrequenz ω schwingt die Olive im Glas?
4. Was ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung?

Lösung

1. Die potenzielle Energie ist $U(x) = mgy = mga^2x^2$.

2. Die Kraft ist

$$F = -\frac{dU}{dx} = -2mgax$$

daher ergibt sich die Differentialgleichung $\ddot{x} + 2gax = 0$.

3. Die Winkelgeschwindigkeit ist $\omega = \sqrt{2ga}$.

4. Die allgemeine Lösung ist $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$.

5 Wellenzahlen

Gegeben sei eine Welle mit der Frequenz $f = 5\text{Hz}$, der Amplitude $A = 12\text{ cm}$ und der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = 20\text{ m/s}$.

1. Bestimmen Sie Kreisfrequenz, Wellenzahl und geben Sie die Funktion $(y(x, t))$ der Welle an.

Bestimmen Sie für jeden Ort der Welle

2. die maximale Geschwindigkeit v_{max} ,
3. die maximale Beschleunigung a_{max} .

Lösung

1. Für die Kreisfrequenz gilt

$$\omega = 2\pi f = 31,6(\text{rad})\text{Hz}$$

Für die Wellenzahl gilt

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Wellenzahl k und Kreisfrequenz ω sind verkoppelt über die Phasengeschwindigkeit c

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\lambda}{T} = c \Rightarrow k = \frac{\omega}{c} = \frac{31,6\text{Hz}}{20\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1,57\text{m}^{-1}$$

Die harmonische Welle wird dargestellt durch

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) = 0,12\text{m} \sin(1,57\text{m}^{-1}x - 31,6\text{Hz}t)$$

2. Geschwindigkeit und Beschleunigung ergeben sich durch Ableiten von $y(x, t)$. Dabei darf ein beliebiger fester Ort gewählt werden. Die Maximalwerte entsprechen den Vorfaktoren der jeweiligen harmonischen Funktionen.

$$y(x, t) = -0,12\text{m} \sin(31,6\text{Hz}t) \quad (23)$$

$$\dot{y}(x, t) = -0,12\text{m} \cdot 31,6\text{Hz} \cos(31,6\text{Hz}t) \quad (24)$$

$$\ddot{y}(x, t) = 0,12\text{m} \cdot (31,6\text{Hz})^2 \sin(31,6\text{Hz}t) \quad (25)$$

$$|v_{max}| = 0,12\text{m} \cdot 31,6\text{Hz} = 3,77\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (26)$$

$$|a_{max}| = 0,12\text{m} \cdot (31,6\text{Hz})^2 = 118\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad (27)$$

6 Orgelpfeife

In einer Orgelpfeife wird die umschlossene Luftsäule zu Schwingungen angeregt, so dass sich eine stehende Welle ausbildet. Es soll ein Ton der Frequenz $\nu_0 = 35\text{Hz}$ (Grundton) erzeugt werden. (*Hinweis:* $c_{\text{Luft}} = 340\frac{\text{m}}{\text{s}}$)

1. Berechnen Sie die für die angegebene Frequenz ν_0 erforderliche Länge L der Pfeife für eine (i) beidseitig offene bzw. eine (ii) einseitig offene Pfeife.
2. Berechnen Sie die allgemeinen Frequenzen ν_h der Obertöne für die beidseitig und die einseitig offene Pfeife. Skizzieren Sie jeweils den Verlauf der orts-abhängigen Amplitude der stehenden Welle in beiden Fällen für den **ersten** und **zweiten Oberton**.

Lösung

1. Für die beidseitig offene Pfeife gilt:

$$L = (n + 1) \frac{\lambda_n}{2} \Rightarrow L = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow c = 2L\nu_0 \Rightarrow L = \frac{c}{2\nu_0} = 4,86\text{m}$$

Für die einseitig offene Pfeife gilt:

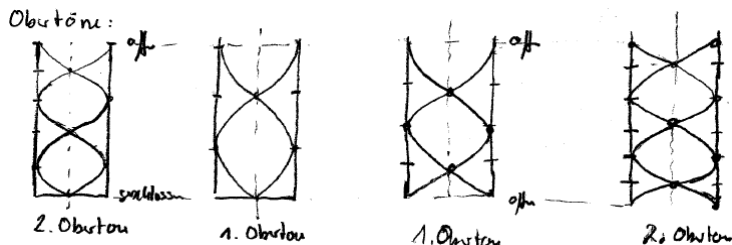
$$L = (2n + 1) \frac{\lambda_n}{4} \Rightarrow L = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow c = 4L\nu_0 \Rightarrow L = \frac{c}{4\nu_0} = 2,43\text{m}$$

2. Frequenz des n-ten Obertones einer beidseitig offenen Pfeife:

$$L = \frac{\lambda}{2} + n \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \nu_n = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2L}(1 + n) = \nu_0(1 + n)$$

Frequenz des n-ten Obertones einer einseitig offenen Pfeife:

$$L = \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \nu_n = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{4L}(1 + 2n) = \nu_0(1 + 2n)$$



7 Transversale Seilwelle

Eine $m_k = 20$ kg schwere Kiste hängt am Ende eines $L = 80$ m langen Seils, das in einen Schacht hinuntergelassen ist. Die Masse des Seils betrage $m_s = 2$ kg. Ein Höhlenforscher am Boden des Schachtes kommuniziert mit seinem Kollegen an der Erdoberfläche, in dem er das Seil am Ende, an dem auch die Kiste hängt, seitwärts auslenkt und eine transversale Welle im Seil anregt.

1. Was ist die Spannung im Seil (d.h. welche Kraft wirkt an seinem Ende), wenn Sie das Eigengewicht des Seiles vernachlässigen?
2. Was ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der transversale Seilwellen? Leiten Sie das Ergebnis aus einer Einheitenbetrachtung her, in dem Sie annehmen, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit nur von der Spannkraft aus dem Aufgabenteil a) und der Masse pro Seillänge $\mu = \frac{m_s}{L}$ abhängt.
3. Im Seil wird eine transversale harmonische Welle mit einer maximalen Auslenkung von 5 cm und einer Frequenz von 2,0 Hz angeregt. Was ist die Wellenlänge der harmonischen Schwingung? (Wenn Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit in der letzten Teilaufgabe nicht ausrechnen konnten, rechnen Sie mit $c_{Seil} = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ weiter).
4. Geben Sie einen mathematischen Ausdruck an, der die Auslenkung des Seils ($y(x, t)$) als Funktion von Zeit und Ort für die in der letzten Teilaufgabe besprochene Situation beschreibt.

Lösung

1.

$$T = m_k \cdot g = 196 \text{ N} \quad (28)$$

2.

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 88,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (29)$$

3. allgemein gilt $c = \lambda \cdot f$ Daraus folgt

$$\lambda = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \frac{1}{f} = 44,25 \text{ m} \quad (30)$$

4. Der allgemeine Lösungsansatz der Wellengleichung lautet $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$. Aus der vorherigen Teilaufgabe ist bekannt, dass $A = 5 \text{ cm}$. Desweiteren gilt

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 0,14 \frac{1}{\text{m}} \quad (31)$$

$$\omega = 2\pi f = 12,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (32)$$

$$\Rightarrow y(x, t) = 5 \text{ cm} \sin\left(\frac{0,14}{\text{m}}x - 12,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}t + \phi\right) \quad (33)$$

Statt des ϕ könnte man alternativ auch einen cos-Term addieren, allerdings sind dann die genauen Vorfaktoren nicht bekannt.

8 Überlagerung zweier Schallwellen

Die ebene Schallwelle $\Psi_1(z, t) = A \cos(800s^{-1} t - 2m^{-1} z)$ wird mit der ebenen Schallwelle $\Psi_2(z, t) = A \cos(630s^{-1} t - 1,5m^{-1} z)$ überlagert. Wie sieht ihre Überlagerung aus und wie groß ist ihre Gruppengeschwindigkeit im Vergleich zu den Phasengeschwindigkeiten der beiden Einzelwellen?

Lösung:

Für die Überlagerung erhält man unter Verwendung von $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$$\begin{aligned}\Psi(z, t) &= \Psi_1 + \Psi_2 = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right) \cos(\bar{\omega}t - \bar{k}z) \\ &= 2A \cos(85s^{-1}t - 0,25m^{-1}z) \cos(715s^{-1}t - 1,75m^{-1}z)\end{aligned}$$

Die Phasengeschwindigkeiten der Einzelwellen sind

$$v_{ph1} = \frac{\omega_1}{k_1} = 400 \frac{m}{s} \quad v_{ph2} = \frac{\omega_2}{k_2} = 420 \frac{m}{s}$$

Die Gruppengeschwindigkeit beträgt

$$v_{gr} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = 340 \frac{m}{s}$$