Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs

Experimentalphysik 1

WS 2018/19

Aufgabenblatt 3

Cara Zimmermann
Lara Szeimies

Inhaltsverzeichnis

1 Tankschiff

Ein quaderförmiges Tankschiff habe eine Grundfläche von $A = 400\,\mathrm{m} \times 50\,\mathrm{m}$ und sinkt, wenn es unbeladen ist, um $h = 4\,\mathrm{m}$ ins Wasser der Dichte $\rho_{\mathrm{H_2O}} = 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.
(a) Welche Masse M hat das Tankschiff?
(b) Welches Volumen an Erdöl (Dichte $\rho_{\text{Öl}} = 850\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$) hat das Tankschiff aufgenommen, wenn es bei der Befüllung um weitere $\Delta h = 2\,\mathrm{m}$ absinkt?
(c) Welcher Gesamtdruck wirkt auf die Unterseite des mit Erdöl befüllten Tankschiffes?

Lösung
(a)

$$M_{\text{Schiff}} = \rho_{\mathrm{H_2O}} h A = 80 \cdot 10^6\,\mathrm{kg} \tag{1}$$

(b)

$$M_{\text{Öl}} = \rho_{\mathrm{H_2O}} \Delta h A = \rho_{\text{Öl}} V_{\text{Öl}} \tag{2}$$

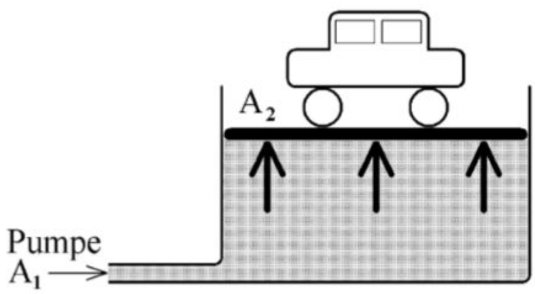
$$V_{\text{Öl}} = \frac{\rho_{\mathrm{H_2O}}}{\rho_{\text{Öl}}} \Delta h A = 47 \cdot 10^3\,\mathrm{m}^3 \tag{3}$$

(c) Für den Druck gilt, da sich der Luftdruck ausgleicht:

$$p = \rho_{\mathrm{H_2O}} g (h + \Delta h) = 59\,\mathrm{kPa} \tag{4}$$

2 Hydraulische Hebebühne

Betrachten wir im Bild eine typische hydraulische Hebebühne, wie sie in Werkstätten verwendet wird, um Autos hochzuheben. Nehmen wir an, ein Auto mit einem Gewicht von $m = 2000\,\mathrm{kg}$ soll hochgehoben werden. Die zur Verfügung stehende Pumpe (links unten im Bild) erzeugt einen kleinen Druck von $p_1 = 300\,\mathrm{mbar}$, mit dem sie eine Hydraulikflüssigkeit in das Rohr mit der Querschnittsfläche $A_1 = 2\,\mathrm{cm}^2$ hineinpumpt.
(a) Wie groß muss die Querschnittsfläche A_2 sein, damit der Druck ausreicht, um das Auto hochzuheben?
(b) Welches Flüssigkeitsvolumen muss die Pumpe fördern, um das Auto einen Meter hoch zu heben? Welchen Volumenstrom muss sie erzeugen, um dieses Anheben in einem Zeitraum von $t = 10\,\mathrm{s}$ zu bewerkstelligen (Angabe in Litern pro Minute)?



Lösung
(a) Die beiden Drücke müssen gleich sein.

$$p_1 = p_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{m_{\text{Auto}} g}{A_2} \tag{5}$$

$$A_2 = \frac{m_{\text{Auto}} g}{p_1} = 0{,}654\,\text{m}^2 \tag{6}$$

(b) Das zu verändernde Volumen berechnet sich über

$$V = Ah = 0{,}654\,\text{m}^2 \cdot 1\,\text{m} = 0{,}654\,\text{m}^3. \tag{7}$$

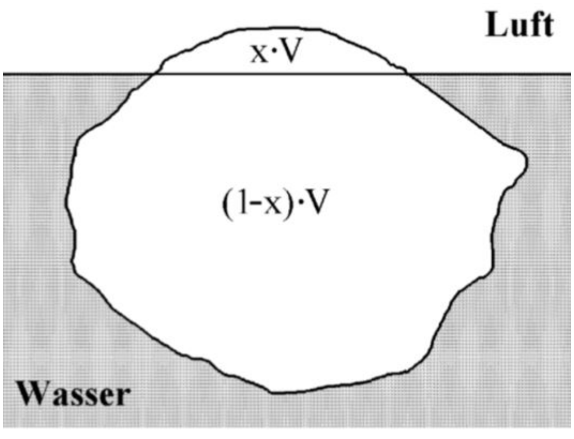
Der Volumenstrom ist definiert als pro Zeit fließendes Volumen:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{0{,}654\,\text{m}^3}{10\,\text{s}} = 0{,}0654\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 0,0654 \frac{1000\,\text{l}}{\frac{1}{60}\text{min}} = 3924\,\frac{\text{l}}{\text{min}} \tag{8}$$

3 Eintauchtiefe eines Eisberges

Welcher Volumenanteil eines Eisberges ragt aus dem Wasser? Die Dichte des Eises und des Wassers hängt vom Salzgehalt und von der Temperatur ab. Arbeiten Sie mit den Dichten $\rho_{\text{Eis}} = 0{,}917\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ und $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1{,}020\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

Lösung



Von einem Eisberg mit dem Volumen V ragt der Anteil x und damit das Teilvolumen $x \cdot V$ aus dem Wasser. Der unter Wasser liegende Teil wird damit beschrieben über $(1-x) \cdot V$. Für die Gravitationskraft des Eisberges gilt:

$$F_{\text{G}} = m_{\text{Eis}} g = \rho_{\text{Eis}} V g \tag{9}$$

Die Auftriebskraft berechnet sich aus der verdrängten Menge Wasser:

$$F_{\text{Auftrieb}} = m_{\text{Wasser}} g = \rho_{\text{H}_2\text{O}} (1-x) V g \tag{10}$$

Diese beiden Kräfte müssen gleich sein, damit der Eisberg schwimmt.

$$\rho_{\text{Eis}} V g = \rho_{\text{H}_2\text{O}} (1 - x) V g \rightarrow 1 - x = \frac{\rho_{\text{Eis}}}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} \tag{11}$$

Vollständig nach x aufgelöst, erhält man:

$$x = 1 - \frac{\rho_{\text{Eis}}}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} \approx 0,1001 \approx 10\,\% \tag{12}$$

4 Archimedes

Archimedes wird nachgesagt, dass er als Erster die Zusammensetzung einer Gold-Silber-Legierung durch Eintauchen des zu untersuchenden Werkstückes in Wasser bestimmen konnte, ohne das Werkstück zerstören zu müssen. Nehmen wir an, das Werksstück wiege $m_{\text{ges}} = 1000\,\text{g}$ und verdränge beim Eintauchen in Wasser $V_{\text{ges}} = 80\,\text{cm}^3$. Berechnen Sie damit den Gewichtsanteil des Silbers und des Goldes. Hinweis: Die Dichten sind $\rho_{\text{Ag}} = 10{,}491\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ und $\rho_{\text{Au}} = 19{,}32\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Gefragt ist die Gewichtszusammensetzung aus Gold und Silber, anzugeben in Prozent.

Lösung Aus den Bedingungen für Massen und Volumen lassen sich zwei Gleichungen aufstellen:

$$m_{\text{ges}} = m_{\text{Ag}} + m_{\text{Au}} = \rho_{\text{Ag}} \cdot V_{\text{Ag}} + \rho_{\text{Au}} \cdot V_{\text{Au}} \tag{13}$$

$$V_{\text{ges}} = V_{\text{Ag}} + V_{\text{Au}} \tag{14}$$

Stellt man die Volumensgleichung um nach V_{Au} und setzt dies in die Massengleichung ein, erhält man:

$$m_{\text{ges}} = \rho_{\text{Ag}} \cdot V_{\text{Ag}} + \rho_{\text{Au}} \cdot (V_{\text{ges}} - V_{\text{Ag}}) \tag{15}$$

Dies kann man nun nach V_{Ag} auflösen.

$$m_{\text{ges}} - \rho_{\text{Au}} \cdot V_{\text{ges}} = \rho_{\text{Ag}} \cdot V_{\text{Ag}} - \rho_{\text{Au}} \cdot V_{\text{Ag}} \rightarrow V_{\text{Ag}} = \frac{m_{\text{ges}} - \rho_{\text{Au}} \cdot V_{\text{ges}}}{\rho_{\text{Ag}} - \rho_{\text{Au}}} = 61{,}796\,\text{cm}^3 \tag{16}$$

Daraus folgt das Gewicht des Silbers:

$$m_{\text{Ag}} = \rho_{\text{Ag}} \cdot V_{\text{Ag}} = 648{,}3\,\text{g} \tag{17}$$

Das Gewicht des Goldes ergibt sich aus der Differenz des Silbergewichtes zum Gesamtgewicht:

$$m_{\text{Au}} = m_{\text{ges}} - m_{\text{Ag}} = 351{,}7\,\text{g} \tag{18}$$

Damit besteht das Werksstück gewichtsmäßig zu 64,83 % aus Silber und zu 35,17 % aus Gold.

5 Draht

Ein Draht der ursprünglichen Länge $l_0 = 15\,\text{m}$ ist an einem Ende befestigt und wird an seinem anderen Ende mit einer Kraft von $F = 300\,\text{N}$ in Längsrichtung gespannt, wobei er eine Längenänderung von $\Delta l = 0{,}6\,\mathrm{cm}$ erfährt. Wie groß ist der Durchmesser dieses Drahtes im gespannten und ungespanntem Zustand, wenn das Drahtmaterial einen Elastizitätsmodul $E = 200\,\mathrm{GPa}$ und einen Schubmodul $G = 75\,\mathrm{GPa}$ hat?

Lösung

Die Dehnung $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ des Drahtes berechnet sich über das Hooke'sche Gesetz mithilfe der Spannung $\sigma = \frac{F}{A}$ und dem Elastizitätsmodul E:

$$\sigma = \frac{F}{A} = E\epsilon = E\frac{\Delta l}{l_0} \tag{19}$$

Dabei ist A die noch unbekannte Querschnittsfläche des Drahtes. Diese ergibt sich für einen Draht mit dem Durchmesser d_0 (ungedehnt) aus obiger Gleichung durch Umstellen zu

$$A = \pi\frac{d_0^2}{4} = F\frac{l_0}{E\Delta l} \tag{20}$$

Der gesuchte (Anfangs-)Durchmesser ist also

$$d_0 = 2\sqrt{F\frac{l_0}{\pi E\Delta l}}. \tag{21}$$

Die Querkontraktion, speziell hier die Verkleinerung des Durchmessers Δd, wird mit der Poisson-Konstante μ beschrieben. Deren Definition lautet

$$\mu = \frac{\frac{\Delta d}{d_0}}{\frac{\Delta l}{l_0}}. \tag{22}$$

Die Poisson-Konstante hängt bei isotropem Material mit deren Moduln zusammen nach

$$E = 2G(1+\mu), \text{ bzw. } \mu = \frac{E}{2G} - 1. \tag{23}$$

Das eingesetzt in die obere Definition von μ, umgeordnet und d_0 eingesetzt, ergibt schließlich

$$\Delta d = d_0\frac{\Delta l}{l_0}\cdot(\frac{E}{2G}-1) = \frac{\Delta l}{l_0}\cdot(\frac{E}{2G}-1)\cdot 2\sqrt{F\frac{l_0}{\pi E\Delta l}} = 2\sqrt{F\frac{\Delta l}{\pi E l_0}}(\frac{E}{2G}-1). \tag{24}$$

Mit den Zahlenwerten der Aufgabenstellung ergibt sich

$$d_0 = 2{,}185\,\mathrm{mm}, \text{ bzw. } \Delta d = 0{,}29\,\mu\mathrm{m}. \tag{25}$$

6 Kupferdraht

Gegeben sei ein Kupferdraht (zylindrisch, $E = 1{,}2\cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$, Poisson-Zahl: $\mu = 0{,}34$) der Länge $L = 1\,\mathrm{m}$ und dem Durchmesser $d = 1\,\mathrm{mm}$, der am oberen Ende eingespannt ist. Am unteren Ende wird eine Masse von $m = 10\,\mathrm{kg}$ befestigt. Bestimmen Sie die relative Änderung von

(a) Länge L,

(b) Querschnittsfläche A

(c) und Volumen V

Nehmen sie $g = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ an.

Lösung
(a) Der Druck p auf den Kupferdraht lässt sich beschreiben als

$$p = \frac{F}{A} = 1{,}27 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}. \tag{26}$$

Daraus lässt sich die relative Längenänderung bestimmen als

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{p}{E} = 1{,}06 \cdot 10^{-3}. \tag{27}$$

(b) Für die relative Änderung der Querschnittsfläche mit Radius r gilt

$$\frac{\Delta r}{r} = -\mu \frac{\Delta l}{l}, \tag{28}$$

$$\Delta A = \pi[(r + \Delta r)^2 - r^2] \approx 2\pi r \Delta r. \tag{29}$$

$$\frac{\Delta A}{A} = 2\frac{\Delta r}{r} = -2\mu\frac{\Delta l}{l} = -0{,}72 \cdot 10^{-3}. \tag{30}$$

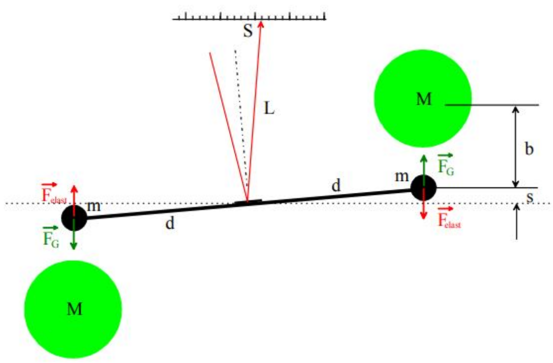
(c) Damit ergibt sich für die relative Volumensänderung:

$$\Delta V = (A + \Delta A)(l + \Delta l) - Al \approx l\Delta A + F\Delta l \tag{31}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta l}{l}(1 - 2\mu) = 0{,}34 \cdot 10^{-3}. \tag{32}$$

7 Drehwaage

Der Torsionsdraht einer Drehwaage ist $d = 10\,\mathrm{cm}$ lang und hat einen Durchmesser von $a = 0{,}01\,\mathrm{mm}$, der Schubmodul des Drahtmaterials sei $G = 400\,\mathrm{GPa}$. An diesem Draht ist ein Spiegel befestigt, um mit einem Lichtzeiger die Torsion des Drahtes genau messen zu können. Wie groß ist das Drehmoment auf diesen Draht, wenn der Lichtzeiger an der Messskala, die 2 m vom Spiegel entfernt ist, einen Ausschlag von 2 mm macht?



Lösung
Ein Drehmoment T bewirkt an einem Torsiondraht der Länge l mit Radius r und Schubmodul G einen Torsionswinkel ϕ gemäß

$$T = \frac{\pi G r^4 \phi}{2l}. \tag{33}$$

Der Lichtzeiger bewegt sich dabei um den doppelten Winkel, also bei einem Ausschlag Δ auf der Skala, die die Entfernung L vom Draht hat, gilt

$$\frac{\Delta}{L} = 2\phi. \tag{34}$$

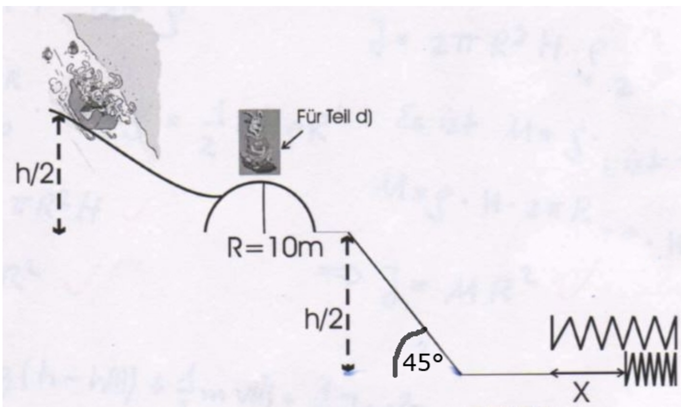
Dies in obige Gleichung eingesetzt, ergibt für einen Drahtdurchmesser a:

$$T = \frac{\pi G r^4 \phi}{2l} = \frac{\pi G a^4 \Delta}{64 l L} = 1{,}96 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{Nm} \tag{35}$$

(Bemerkung: Der Schubmodul G ist hier unrealistisch hoch angegeben. Bei den meisten Metallen ist er um den Faktor 5-20 kleiner.)

8 Wiederholung Tag 1: Schlittenfahrt

Ein Schlitten der Masse $m_1 = 1000\,\mathrm{kg}$ gleitet reibungsfrei einen $\phi = 45°$ steilen Hang hinab und auf halber Höhe $\frac{h}{2}$ über einen Hügel mit dem Radius (= Hügelhöhe) $R = 10\,\mathrm{m}$. Nehmen Sie $g = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ an.
(a) In welcher Höhe h darf der Schlitten höchstens starten, damit der Bodenkontakt an der höchsten Stelle des Hügels gewahrt bleibt? (Zur Kontrolle: Geschwindigkeit v_1 des Schlittens der Masse m_1 auf der Kuppe ist $v_1 = \sqrt{gR}$)
(b) Beim jahrmärktlichen Schlittenhängen werden unten große Federn aufgestellt. Um welche Strecke x wird eine solche ideale Feder mit der Federkonstanten $k = 6000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ gestaucht?
(c) Wie hoch schießt die Feder den Schlitten wieder?
(d) Der Schlitten gleitet nun aus der Höhe h und stößt im höchsten Punkt des Hügels mit einem stehenden Schlitten der Masse $m_2 = 250\,\mathrm{kg}$ zusammen. Die beiden Schlitten verkeilen sich und rutschen nun gemeinsam zur Feder hinab.
   (i) Geben Sie die Formel für die Geschwindigkeit v_{ges} der verkeilten Schlitten direkt nach dem Zusammenprall (also noch auf der Kuppe) an.
   (ii) Wie weit wird die Feder jetzt gestaucht?



Lösung

(a) Die Zentripetalkraft darf maximal der Gewichtskraft entsprechen.

$$F_\mathrm{Z} = F_\mathrm{G} \tag{36}$$

$$\frac{mv_1^2}{R} = mg \rightarrow v_1 = \sqrt{gR} \tag{37}$$

Energieerhaltung führt dann zu:

$$mgh = mg(\frac{h}{2} + R) + \frac{1}{2}mv_1^2 \tag{38}$$

$$\frac{h}{2} = R + \frac{gR}{2g} \rightarrow h = 3R = 30\,\mathrm{m}. \tag{39}$$

(b) Nochmalige Anwendung der Energieerhaltung:

$$mgh = \frac{1}{2}kx^2 \tag{40}$$

$$x = \sqrt{\frac{2mgh}{k}} = 10\,\mathrm{m} \tag{41}$$

(c) Da keine Reibung vorhanden ist und auch sonst keine Energie verloren geht, erreicht der Schlitten wieder die Ausgangshöhe h.

(d) (i) Geschwindigkeit vor dem Zusammenprall aus (a): $v_1 = \sqrt{gR}$
Es gilt Impulserhaltung:

$$m_1v_1 = (m_1 + m_2)v_\mathrm{ges} \rightarrow v_\mathrm{ges} = \frac{m_1v_1}{m_1 + m_2} = 8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{42}$$

(ii) Wieder gilt Energieerhaltung:

$$(m_1 + m_2)g(\frac{h}{2} + R) + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_\mathrm{ges}^2 = \frac{1}{2}kx^2 \tag{43}$$

$$x = \sqrt{\frac{2}{k}(m_1 + m_2)(g(\frac{h}{2} + R) + \frac{1}{2}v_\mathrm{ges}^2)} = 10{,}84\,\mathrm{m} \tag{44}$$