Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs

Experimentalphysik 1

WS 2018/19

Aufgabenblatt

Cara Zimmermann
Lara Szeimies

Inhaltsverzeichnis

1 Pendel

Eine Kugel mit der Masse von 5g und einer Geschwindigkeit von $400\frac{m}{s}$ trifft auf eine große Kugel mit der Masse 10kg, die an einem Faden aufgehängt ist. Auf welche Höhe schwenkt die große Kugel aus, wenn der Stoß als ideal elastisch und zentral angenommen wird?

Lösung

Für den elastischen Stoß zwischen der kleinen und der großen Kugel gilt der Impulserhaltungssatz

$$mv = mu_1 + Mu_2 \tag{1}$$

mit m, der Masse der kleinen und M, der Masse der großen Kugel, sowie der Geschwindigkeit v der kleinen Kugel vor dem Stoß und u_1 und u_2 die Geschwindigkeiten der kleinen bzw. großen Kugel nach dem Stoß.
Außerdem gilt der Energieerhaltungssatz:

$$\frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}u_1^2 + \frac{M}{2}u_2^2 \tag{2}$$

$$mv^2 = mu_1^2 + Mu_2^2 \tag{3}$$

Mit Gleichung 1 folgt

$$u_1 = v - \frac{M}{m}u_2 \tag{4}$$

Einsetzen in Gleichung 3

$$mv^2 = m(v - \frac{M}{m}u_2)^2 + Mu_2^2 \tag{5}$$

$$0 = -2Mu_2v + \frac{M^2}{m}u_2^2 + Mu_2^2 \tag{6}$$

Die triviale Lösung ist $u_2 = 0$. Für $u_2 \neq 0$

$$0 = -2Mv + (\frac{M^2}{m} + M)u_2 \tag{7}$$

$$u_2 = \frac{2m}{M+m}v \tag{8}$$

Betrachtet man nun das Pendeln der Kugel als getrennten Vorgang, so ist u_2 die Maximalgeschwindigkeit im tiefsten Punkt der Pendelbewegung. Die große Kugel hat hier also nur kinetische Energie. Im Punkt der maximalen Auslankung hat sie hingegen nur potenzielle Energie. Nach dem Energieerhaltungssatz gilt für die Pendelbewegung somit

$$\frac{M}{2}u_2^2 = Mgh \tag{9}$$

$$h = \frac{u_2^2}{2g} = (\frac{2m}{M+m}v)^2 \cdot \frac{1}{2g} = 8mm \tag{10}$$

2 Nicht Zentraler Stoß

Eine 100g schwere Kugel prallt mit 1 $\frac{m}{s}$ so gegen eine ruhende, doppelt so schwere zweite Kugel, dass diese im Winkel von 30° zur Bewegungsrichtung der ersten Kugel weg rollt. Wie schnell rollen die beiden Kugeln nach dem Stoß? Um wie viel Grad wird die erste Kugel aus ihrer Bewegungsrichtung abgelenkt?

Lösung

Impulserhaltung in x-Richtung:

$$m_1 \cdot v_{1x} + m_2 \cdot v_{2x} = m_1 \cdot v'_{1x} + m_2 \cdot v'_{2x} \tag{11}$$

$$100g \cdot 1\frac{m}{s} = 100g \cdot v'_{1x} + 200g \cdot v'_{2x} \tag{12}$$

$$v'_{1x} = 1\frac{m}{s} - 2 \cdot v'_{2x} \tag{13}$$

Impulserhaltung in y-Richtung:

$$m_1 \cdot v_{1y} + m_2 \cdot v_{2y} = m_1 \cdot v'_{1y} + m_2 \cdot v'_{2y} \tag{14}$$

$$0 = 100g \cdot v'_{1y} + 200g \cdot v'_{2y} \tag{15}$$

$$v'_{1y} = -2 \cdot v'_{2y} \tag{16}$$

Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 \tag{17}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 100g \cdot 1\frac{m}{s} = \frac{1}{2} \cdot 100g \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2} \cdot 200g \cdot v_2'^2 \tag{18}$$

Mit $v_1'^2 = v_{1x}'^2 + v_{1y}'^2$ und $v_2'^2 = v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2$

$$1\frac{m}{s} = v_{1x}'^2 + v_{1y}'^2 + 2 \cdot v_{2x}'^2 + 2 \cdot v_{2y}'^2 \tag{19}$$

Durch einsetzen der beiden Impulsbilanzen in die Energiebilanz erhält man:

$$0 = 3v_{2x}'^2 - 2v'_{2x} + 3v_{2y}'^2 \tag{20}$$

Aus der gegebenen Bewegungsrichtung folgt: $v'_{2x} = \sqrt{3} \cdot v'_{2y}$ Setzt man dies ein in Gleichung 20 erhält man:

$$0 = 12v'_{2y} \cdot (v'_{2y} - \frac{\sqrt{3}}{6}) \tag{21}$$

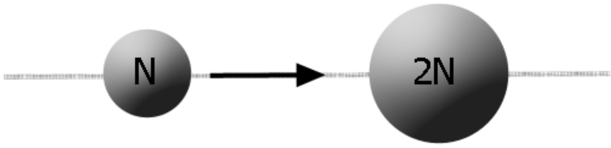
Daraus ergibt sich:

$$v'_{2y} = \frac{\sqrt{3}}{6}; v'_{2x} = \frac{1}{2}; v'_{1x} = 0; v'_{1y} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{22}$$

Die erste Kugel ist um $\alpha = arctan(\frac{v'_{1y}}{v'_{1x}}) = -90°$ zur ursprünglichen Bewegungsrichtung abgelenkt.
Die Beträge sind $v'_1 = \sqrt{v'^2_{1y} + v'^2_{1x}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $v'_2 = \sqrt{v'^2_{2y} + v'^2_{2x}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

3 Neutronenstoß

Ein Neutron mit Masse m_N und Impuls p_N stößt zentral und elastisch auf einen im Laborsystem ruhenden Deuterium-Kern der Masse $2m_N$.



1. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Neutrons nach dem Stoß?
2. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Gesamtsystems.
3. Welche Geschwindigkeit hat das Neutron im Schwerpunktsystem vor und nach dem Stoß?

Lösung

1. Gegeben sind m_N und p_N, damit auch $v_N = \frac{p_N}{m_N}$. Gesucht ist v'_N.

   Mit dem Energieerhaltungssatz gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_N v_N^2 &= \frac{1}{2}m_N v_N'^2 + \frac{1}{2}2m_N v_0'^2 \\ v_N^2 &= v_N^2{}' + 2v_0^2{}' \end{aligned}$$

   Weiter gilt mit dem Impulserhaltungssatz (kann vektoriell gemacht werden, ist aber nicht nötig)

$$\begin{aligned} m_N v_N &= m_N v'_N + 2m_N v'_0 \\ v_N &= v'_N + 2v'_0 \end{aligned}$$

   Weiter gilt

$$\begin{aligned} v_N^2 &= v_N'^2 + 2v_0'^2 = v_N'^2 + \frac{1}{2}(v_N - v'_N)^2 \\ v_N^2 - v_N'^2 &= \frac{1}{2}(v_N - v'_N)^2 \\ (v_N + v'_N)(v_N - v'_N) &= \frac{1}{2}(v_N - v'_N)(v_N - v'_N) \\ v_N + v'_N &= \frac{1}{2}(v_N - v'_N) \\ v_N &= -3v'_N \\ v'_N &= -\frac{1}{3}v_N \end{aligned}$$

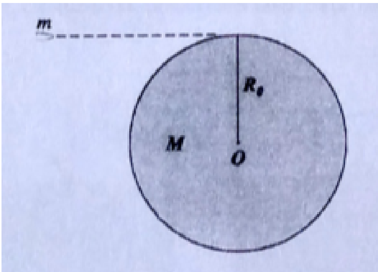
2. $(m_N + 2m_N)v_s = m_N v_N \Rightarrow v_s = \frac{v_N}{3}$

3.

$$v_{N,s} = v_N - v_s = v_N - \frac{v_N}{3} = \frac{2}{3}v_N$$
$$v_{N,s} = v'_N - v_s = -\frac{1}{3}v_N - \frac{v_N}{3} = -\frac{2}{3}v_N$$

4 Geschoss

Ein Geschoss mit der Masse m, das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, trifft den Rand eines Zylinders mit der Masse M und dem Radius R_0 (siehe Abbildung). Bei dem Stoß bleibt es im Zylinder stecken. Dadurch beginnt sich der anfangs ruhende Zylinder um seine ortsfeste Symmetrieachse reibungslos zu drehen.



(a) Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit w des Zylinders nach dem Stoß.

(b) Zeigen Sie, dass die kinetische Energie im Anfangszustand in diesem Stoß nicht vollständig in kinetische Energie im Endzustand überführt wir. *Hinweis*: Der Differenzbetrag bei diesem inelastischen Stoß wird in Wärmeenergie umgewandelt.

Lösung

(a)
$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$
Drehimpuls der Kugel vor dem Stoß in Bezug auf die Symmetrieachse des Zylinders:

$$L_k = |\vec{r}| \cdot |\vec{p}| \cdot sin(90°) = R_0 \cdot m \cdot v \cdot sin(90°) = R_0 \cdot m \cdot v \tag{23}$$

Drehimpulserhaltung:

$$L_K = L_Z + L'_K \tag{24}$$

$$R_0 \cdot m \cdot v = I_Z \cdot w + I_K \cdot w \tag{25}$$

$$R_0 \cdot m \cdot v = (\frac{1}{2} \cdot M \cdot R_0^2 + m \cdot R_0^2) \cdot w \tag{26}$$

$$w = \frac{m \cdot v}{(0,5 \cdot M + m) \cdot R_0} \tag{27}$$

(b)

$$E_{kin,Ende} - E_{kin,Anfang} \tag{28}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot I_Z \cdot w^2 + \frac{1}{2} \cdot I_K \cdot w^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \tag{29}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot M \cdot R_0^2 + m \cdot R_0^2) \cdot w^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \tag{30}$$

$$= (\frac{1}{2} \cdot \frac{m^2}{\frac{1}{2}M + m} - \frac{1}{2} \cdot m) \cdot v^2 \tag{31}$$

$$= -\frac{mM}{2M + 4m} \cdot v^2 < 0 \tag{32}$$

Und damit ist gezeigt, dass die kinetische Energie am Ende kleiner ist als die kinetische Energie am Anfang.

5 Bierfass

Ein leeres Bierfass (Hohlzylinder mit Radius r = 0,2 m und Masse m = 13 kg) rollt mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 3\frac{m}{s}$ auf eine Abwärtsrampe zu. Die Abwärtsrampe überwindet einen Höhenunterschied von Δh = 3 m und hat einen Winkel zum Erdboden von $\alpha = 20°$.
(Vernachlässigen Sie jegliche Reibung)

(a) Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit w_0 des Fasses oberhalb der Rampe?

(b) Wie groß ist die Geschwindigkeit v_1 und Winkelgeschwindigkeit w_1 unterhalb der Rampe?

Lösung

(a)

$$w_0 = \frac{v_0}{r} = 15\frac{rad}{s} \tag{33}$$

(b)
Energieerhaltung:

$$E_{kin,Anfang} + E_{rot,Anfang} + E_{pot,Anfang} = E_{kin,Ende} + E_{rot,Ende} \tag{34}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}Iw_0^2 + mg\Delta h = \frac{1}{2}Iw_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 \tag{35}$$

Mit dem Trägheitsmoment $I = mr^2$ und der Winkelgeschwindigkeit am Anfang und am Ende $w_{0,1} = \frac{v_{0,1}}{r}$ folgt:

$$mg\Delta h + mv_0^2 = mv_1^2 \tag{36}$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + g\Delta h} = 6,2\frac{m}{s} \ und \ w_1 = 31\frac{rad}{s} \tag{37}$$

6 Drehstuhl

Ein Mensch sitzt auf einem Drehstuhl, so dass er bezüglich der Drehachse des Stuhls ein Trägheitsmoment von $T_{Mensch} = 1kgm^2$ hat. Man gibt ihm zwei Gewichte von jeweils $m = 5kg$, $r = 0,05m$, die er mit ausgestreckten Armen im Abstand $\Delta x_1 = 0,8m$ von der Drehachse des Stuhls hält. Danach dreht man ihn an, so dass er sich samt Gewichten mit einer Winkelgeschwindigkeit $w_0 = 2\frac{rad}{s}$ dreht. Nun zieht der Mensch die Gewichte eng an seinen Körper, so dass sie nur noch $\Delta x_2 = 0,1m$ von der Drehachse entfernt sind.
(Reibung vernachlässigen)

(a) Berechnen Sie das gesamte Trägheitsmoment T_{ges} von Mensch und Gewichten für ausgestrechte Arme ($T_{ges,1}$) und angezogene Arme ($T_{ges,2}$).
(Vernachlässigen Sie den Trägheitsmomentunterschied, der durch die unterschiedliche Haltung der Arme entsteht.)

(b) Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit w_2 mit angezogenen Armen.

(c) Berechnen Sie die Geschwindigkeitsbeträge der Gewichte für ausgestreckte Arme (v_1) und angezogene Arme (v_2).

Lösung

(a)
Das Trägheitsmoment der Kugeln lässt sich über den Satz von Steiner berechnen, wobei man das Trägheitsmoment einer massiven Kugeln mit Drehachse durch dessen Mittelpunkt $T_{Kugel} = \frac{2}{5}mr^2$ verwendet.
Somit ergibt sich nach dem Satz von Steiner das Trägheitsmoment der Kugel mit ausgestreckten Armen: $T_{Kugel,1} = \frac{2}{5}mr^2 + m\Delta x_1^2$ und mit angezogenen Armen: $T_{Kugel,2} = \frac{2}{5}mr^2 + m\Delta x_2^2$
Das gesamte Trägheitsmoment ist somit:

$$T_{ges,1} = T_{Mensch} + 2 \cdot T_{Kugel,1} = 7,41kgm^2 \tag{38}$$

$$T_{ges,2} = T_{Mensch} + 2 \cdot T_{Kugel,2} = 1,11kgm^2 \tag{39}$$

(b) Drehimpulserhaltung

$$T_{ges,1} \cdot w_0 = T_{ges,2} \cdot w_2 \tag{40}$$

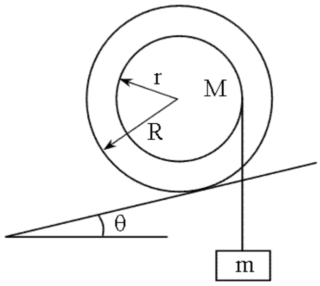
$$w_2 = w_0 \cdot \frac{T_{ges,1}}{T_{ges,2}} = 13,4\frac{rad}{s} \tag{41}$$

(c)

$$v_1 = w_0 \cdot \Delta x_1 = 1,6\frac{m}{s} \tag{42}$$

$$v_2 = w_2 \cdot \Delta x_2 = 1,3\frac{m}{s} \tag{43}$$

7 Jojo

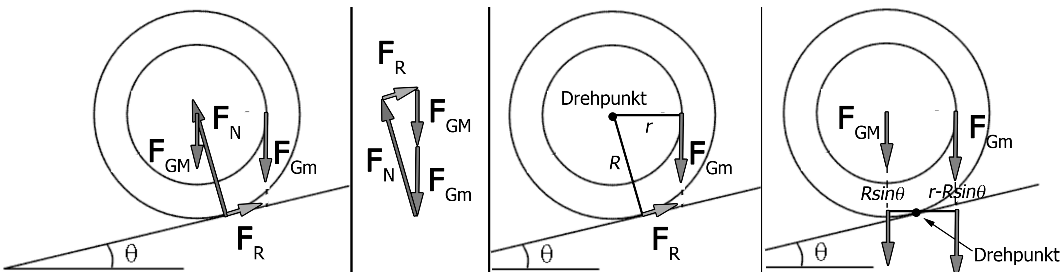


Ein Jojo mit angehängtem Gewicht befindet sich auf einer schiefen Ebene im Gleichgewicht und bewegt sich nicht.

Das Jojo ($M = 3$kg) besteht aus einem inneren Zylinder mit Radius $r = 5$cm. An dessen Enden sind zwei Scheiben mit größerem Radius $R = 6$cm angebracht. Auf dem inneren Zylinder ist ein Faden aufgewickelt, an dem ein Gewicht der Masse $m = 4,5$kg befestigt ist. Das Jojo liegt auf einer Ebene auf, die um den Winkel θ gegen die Waagrechte gekippt ist. Machen Sie eine Zeichnung in der Sie die Kräfte eintragen die auf das Jojo wirken (mit richtigen Ansatzpunkten). Wie groß muss θ sein, damit sich das System in Ruhe befindet?

Hinweis: Das Jojo kann nicht rutschen. Das Jojo kann sich um verschiedene Punkte „nicht drehen". Wählen Sie einen aus.

Lösung



Die vier am Jojo angreifenden Kräfte sind: die Gewichtskraft des Jojo im Schwerpunkt $\vec{F}_{GM}$, die Seilkraft der kleinen Masse $\vec{F}_{Gm}$ am Rand der kleinen Rolle, die Normalkraft am Auflagepunkt $\vec{F}_N$ und die Reibungskraft $\vec{F}_R$ am Auflagepunkt, damit das Jojo nicht rutscht. Da sich das Jojo nicht bewegt muss ein Kräftegleichgewicht herrschen.

$$\sum_i F_i = 0 \Rightarrow \vec{F}_{GM} + \vec{F}_{Gm} + \vec{F}_N + \vec{F}_R = 0 \tag{44}$$

Das System befindet sich in Ruhe, alle angreifenden Drehmomente müssen sich zu 0 addieren. Die beiden offensichtlichen Wahlen als Drehpunkt sind der Mittelpunkt des Jojo und der Auflagepunkt. Hier wählen wir den Mittelpunkt als Drehpunkt

$$\sum_i D_i = 0 \tag{45}$$

Es wirken nur noch zwei Kräfte um Drehmomente zu erzeugen: die Reibungskraft $\vec{F}_R$ und die Seilkraft der kleinen Masse $\vec{F}_{Gm}$.

$$D_{Gm} = mgr \tag{46}$$

Die Reibungskraft kompensiert gerade den Anteil der Gewichtskräfte, die eine Hangsabtriebskraft erzeugen:

$$F_H = (M+m)g\sin\theta \Rightarrow D_R = F_H R = (M+m)gR\sin\theta \tag{47}$$

Beide Drehmomenten sind entgegen gerichtet. Es muss gelten $D_{Gm} = D_R$, und somit folgt:

$$R(M+m)g\sin\theta = mgr \Rightarrow \sin\theta = \frac{mr}{(M+m)R} = 0,5 \Rightarrow \theta = 30^\circ \tag{48}$$

Alternativ:

Wir wählen den Auflagepunkt als Drehpunkt. Die beiden wirkenden Drehmomente werden von der Gewichtskraft des Jojo im Schwerpunkt $\vec{F}_{GM}$ und der Seilkraft der kleinen Masse $\vec{F}_{Gm}$ erzeugt.

Damit ergibt sich ein Drehmoment $\vec{F}_{Gm}$ der kleinen Masse mit verkürztem Hebelarm zu

$$D_{Gm} = mg(r - R\sin\theta) \tag{49}$$

Damit ergibt sich ein Drehmoment $\vec{F}_{GM}$ der Jojomasse mit verkürztem Hebelarm zu

$$D_{GM} = MgR\sin\theta \tag{50}$$

Damit sich die Momente aufheben, muss gelten $D_{GM} = D_{Gm}$, und somit folgt:

$$RMg\sin\theta = mgr \Rightarrow \sin\theta = \frac{mr}{(M+m)R} = 0,5 \Rightarrow \theta = 30^\circ \tag{51}$$

8 Der Nord-Süd-Pol-Express

Sie bauen eine Strecke für Schnellzüge die in einem Kreis einmal um die Erde und dabei über beide Pole geht. Nun fährt ein Schnellzug mit konstant 360 km/h auf dieser Strecke. Vernachlässigen sie Reibung. Der Zug hat eine Masse von 400 t.

a) An welcher/-n Stelle(n) ist die seitwärts auf die Schienen wirkende Kraft am größten, wo am kleinsten?

b) Was ist der Wert der Kraft, an der/-n Stelle(n), an denen die Kraft minimal wird?

c) Berechnen sie den Betrag der Kraft, die die Schienen maximal seitwärts auf den Zug ausüben müssen! In welche Richtung wirkt die Kraft?

d) Wie schnell dürfte der Zug fahren, wenn die Schienen seitwärts maximal eine Kraft von 10kN auf den Zug ausüben können, ungeachtet davon ob das geht?

Lösung

a) An den Polen ist die Seitwärtskraft (Corioliskraft) am größten am Äquator ist sie minimal.

b) Am Äquator wird die Corioliskraft gleich 0.

c)
$$|F_C| = 2 \cdot 400000kg \cdot 100\frac{m}{s}\frac{2\pi}{3600 \cdot 24s} = 5,8kN \tag{52}$$

d)
$$v_{max} = \frac{10000N \cdot 3600 \cdot 24s}{2 \cdot 400000kg \cdot 2\pi} = 172\frac{m}{s} \tag{53}$$