Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs

Experimentalphysik 1

WS 2018/19

Aufgabenblatt 1 Lösung

Cara Zimmermann
Lara Szeimies

Inhaltsverzeichnis

1 Wurf

Ein Ball trifft mit Geschwindigkeitsbetrag $v = 35\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ unter einem Winkel von $\alpha = 15°$ relativ zum Boden auf einen glatten, ebenen Boden und wird ohne Energieverlust reflektiert. Vernachlässigen Sie Reibungseffekte!
(a) Auf welche Höhe Δz über den Boden kommt der Ball maximal?
(b) Welche Strecke Δx parallel zum Erbdoden legt der Ball zurück, bevor er das nächste Mal auf den Boden auftrifft?
(c) Unter welchem Winkel relativ zum Erdboden trifft er das nächste Mal auf?

Lösung
(a) Die Bewegung des Balles in z-Richtung wird allgemein beschrieben durch

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{\text{z}}(t=0)t. \tag{1}$$

Aus dem Geschwindigkeitsbetrag und dem Auftreffwinkel (=Reflektionswinkel) ergibt sich für $v_{\text{z}}(t=0)$:

$$v_{\text{z}}(t=0) = v\sin(15°) = 9\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{2}$$

Die Geschwindigkeit v_{z} ist im höchsten Punkt Null. Daher muss gelten

$$v(T) = -gT + v_{\text{z}}(t=0) = 0\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow T = \frac{v_{\text{z}}(t=0)}{g} = 0{,}93\,\text{s}. \tag{3}$$

Damit ist

$$\Delta z = z(T) = 4{,}2\,\text{m}. \tag{4}$$

(b) Aus der Symmetrie des Problems folgt:

$$t_{\text{Auftreffen}} = 2T \tag{5}$$

Die Bewegung in x-Richtung ist unabhängig von der Bewegung in z-Richtung und erfolgt daher als

$$x(t) = v_{\text{x}}t = v\cos(15°)t, \tag{6}$$

woraus mit $t_{\text{Auftreffen}}$ folgt:

$$\Delta x = x(t_{\text{Auftreffen}}) = 2v_{\text{x}}T = 63\,\text{m}. \tag{7}$$

(c) Da der Flug symmetrisch ist und keine Energie durch Reibung verloren geht, ist $\beta = \alpha$.

2 Karussell

Ein Karussell dreht sich um eine Achse, die einen Winkel $\alpha = 45°$ zum Erdboden einschließt, mit 0,5 Umdrehungen pro Sekunde. Die Menschen stehen angeschnallt in einem Abstand von $R = 5\,\text{m}$ zur Drehachse.
(a) Berechnen Sie den Betrag der Zentrifugalkraft F_{Z}, die auf einen Menschen der Masse $m = 65\,\text{kg}$ wirkt!
(b) Berechnen Sie den gesamten Kraftvektor $\vec{F_{\text{Ges}}}$ einschließlich Gewichtskraft, der auf

diesen Menschen (in seinem Bezugssystem) am höchsten Punkt der Karussellbewegung wirkt! Wählen Sie hierzu ein rechtwinklinges Koordinatensystem mit z-Achse senkrecht zum Erdboden und y-Achse senkrecht zu F_Z! (Skizze kann helfen)
(c) An welcher Stelle der Drehung ist der Betrag von F_{ges} maximal? (Zeichnung)

Lösung

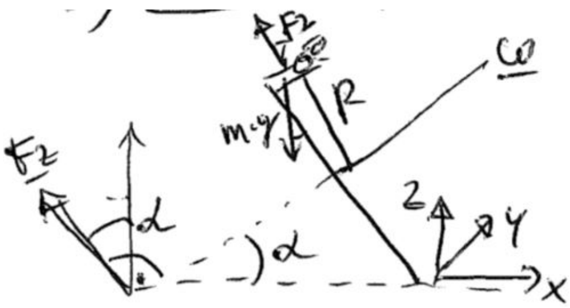

Abbildung 1: Karussell

(a) Für den Betrag der Zentrifugalkraft gilt

$$|F_Z| = m\omega^2 R = 3200\,\text{N}. \tag{8}$$

(b) Der Vektor für die Gewichtskraft ist definiert als

$$\vec{F_G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Für den Vektor der Zentrifugalkraft am höchsten Punkt gilt:

$$\vec{F_Z} = \begin{pmatrix} -m\omega^2 R\sin(\alpha) \\ 0 \\ m\omega^2 R\cos(\alpha) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Daraus ergibt sich für die Gesamtkraft

$$\vec{F_{Ges}} = \begin{pmatrix} -m\omega^2 R\sin(\alpha) \\ 0 \\ -m\omega^2 R\cos(\alpha) - mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2260 \\ 0 \\ 1625 \end{pmatrix} \text{N}. \tag{11}$$

(c) Am untersten Punkt des Karussells.

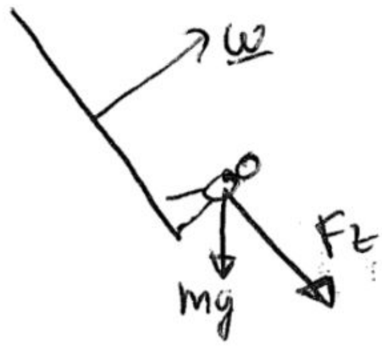

Abbildung 2: Kräfte im untersten Punkt des Karussells

3 Fall

Eine Kugel ($m = 7\,\text{kg}$) rollt ohne zu rutschen mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf die Kante vor einem Abhang zu. Hinter der Kante fällt das Gelände zunächst senkrecht um $\Delta z = 5\,\text{m}$ nach unten, ehe eine Hangschräge mit $\alpha = 20°$ beginnt, die im Rahmen der Aufgabe nicht endet (s. Abbildung). Vernachlässigen Sie den Durchmesser der Kugel.
(a) Wie weit entfernt in x-Richtung von der Hangkante trifft die Kugel auf dem Hang auf?
(b) Wie lange braucht die Kugel von der Hangkante bis zum Aufprall?
(c) Wie groß ist die kinetische Energie der Kugel beim Aufprall?

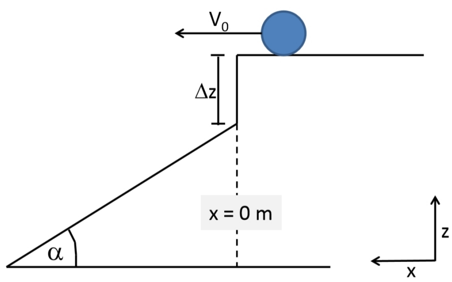

Abbildung 3: Fall

Lösung
(a) Die Bewegung ist gegeben über

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{12}$$

$$x(t) = v_0 t \rightarrow t = \frac{x}{v_0} \tag{13}$$

Damit die Strecke in x-Richtung bestimmt werden kann, müssen die z-Komponenten der Kugel und der Hangschräge gleich sein.

$$\frac{gx^2}{2v_0^2} = \Delta z + \tan(\alpha)x \tag{14}$$

$$x^2 - \frac{2v_0^2\tan(\alpha)}{g}x - \frac{2v_0^2\Delta z}{g} = 0 \tag{15}$$

$$x_{1,2} = \frac{v_0^2\tan(\alpha)}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2\tan(\alpha)}{g}\right)^2 + \frac{2v_0^2\Delta z}{g}} \tag{16}$$

Die negative Lösung ergibt hier keinen Sinn, daher kommt nur die positive in Frage. Damit folgt

$$x = 14{,}4\,\mathrm{m}. \tag{17}$$

(b)

$$T = \frac{x}{v_0} = 1{,}44\,\mathrm{s} \tag{18}$$

(c) Aufgrund der Energieerhaltung gilt

$$z(T) = -10{,}2\,\mathrm{m} \rightarrow mgz(T) = \frac{1}{2}mv^2 \tag{19}$$

Die Gesamtenergie setzt sich anschließend zusammen als

$$E_{\text{kinetischGesamt}} = \frac{m}{2}(v^2 + v_0^2) = 1055\,\mathrm{J}. \tag{20}$$

4 Pyramidenbaustelle

Ein Würfel aus Stein (Kantenlänge $a = 1\,\mathrm{m}$, Dichte $\rho = 1800\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$), der sich um die linke untere Kante K drehen kann, soll durch ein an der oberen rechten Kante befestigtes, unter dem Winkel $\alpha = 30°$ gegenüber der Horizontalen gespanntes Zugseil auf die Kante gekippt werden.
(a) Wie groß ist die minimal erforderliche Zugkraft F?
(b) Für welchen Winkel α wird diese Zugkraft F minimal und wie groß ist sie dann?

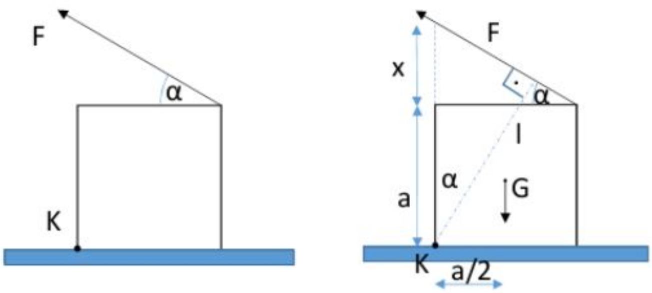

Abbildung 4: Pyramidenbaustelle

Lösung
(a) Der zur Kraft F senkrechte Hebelarm l hat eine Länge, die über die Hilfsgröße $x = a\tan(\alpha)$ als

$$L = (a + x)\cos(\alpha) = a(1 + \tan(\alpha))\cos(\alpha) = a(\sin(\alpha) + \cos(\alpha)) \tag{21}$$

definiert ist. Somit ist das von F erzeugte Drehmoment $M_1 = FL$. Es muss das durch die Gewichtskraft G erzeugte Drehmoment $M_2 = \frac{a}{2}G$ bzgl. der Kante kompensieren.

$$FL = \frac{a}{2}G \tag{22}$$

$$Fa(\sin(\alpha) + \cos(\alpha)) = \frac{a}{2}G \tag{23}$$

$$F = \frac{G}{2(\sin(\alpha) + \cos(\alpha))} \tag{24}$$

(b) Die minimale Kraft ergibt sich aus der Extremwertbestimmung

$$\frac{dF}{d\alpha} = -G\frac{\cos(\alpha) - \sin(\alpha)}{2(\sin(\alpha) + \cos(\alpha))^2} = 0 \tag{25}$$

mit $\sin(\alpha) = \cos(\alpha) = 45°$. Damit wird die minimale Kraft

$$F = \frac{G}{2(\sin(\alpha) + \cos(\alpha))} = 6{,}24\,\mathrm{kN}. \tag{26}$$

5 Skifahrerin

Eine Skifahrerin hat gerade begonnen, einen Abhang mit einem Neigungswinkel von $\alpha = 30°$ aus dem Stillstand heraus hinabzufahren. Nehmen Sie an, dass Gleitreibung mit $\mu = \frac{1}{\sqrt{12}}$ wirkt.
(a) Berechnen Sie den Betrag der anfänglichen Beschleunigung der Skifahrerin.
(b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 4\,\mathrm{s}$.

Auf einer anderen Piste ist der Schnee bereits matschig. Die Skifahrerin fährt diesen Abhang mit konstanter Geschwindigkeit herab. Der dortige Neigungswinkel sei θ.
(c) Bestimmen Sie μ_{matschig} in Abhängigkeit von θ.

Lösung
(a) Wir drehen das Koordiantensystem, sodass die x-Achse parallel zum Abhang liegt. Für Kräfte in x- und y-Richtung muss gelten

$$mg\sin(\alpha) - \mu F_{\mathrm{N}} = ma_{\mathrm{x}} \tag{27}$$

$$F_{\mathrm{N}} - mg\cos(\alpha) = 0 \tag{28}$$

$$F_{\mathrm{N}} = mg\cos(\alpha) \rightarrow mg\sin(\alpha) - \mu mg\cos(\alpha) = ma_{\mathrm{x}} \tag{29}$$

$$a_{\mathrm{x}} = g(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)) = \frac{1}{4}g \tag{30}$$

Da die Beschleunigung in x-Richtung Null ist, gilt

$$a = a_{\mathrm{x}} = 2{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{31}$$

(b)

$$v = at = 2{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 4\,\mathrm{s} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{32}$$

(c) Konstante Geschwindigkeit: $a = 0$. Mit den Gleichungen aus (a) folgt

$$F_\mathrm{N} = mg\cos(\theta) \tag{33}$$

$$mg\sin(\theta) - \mu mg\cos(\theta) = 0 \tag{34}$$

$$\mu = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta) \tag{35}$$

6 Rakete

Eine Silvesterrakete der Masse $m_\mathrm{R} = 40\,\mathrm{g}$ und zusätzlicher Effektladung (Feuerwerk/Nutzlast) der Masse $m_\mathrm{E} = 10\,\mathrm{g}$ wird mit Treibstoff der Brenndauer $T = 1\,\mathrm{s}$ und Masse $m_\mathrm{Tr} = 200\,\mathrm{g}$ gefüllt. Nach Ablauf der Brenndauer ist der gesamte Treibstoff ausgetreten. Der Zündvorgang, der der Rakete einen Schub zur Überwindnng der Gewichtskraft am Boden gibt, soll vernachlässigt werden. Die Verbrenngase werden mit einer konstanten Geschwindigkeit $v_{(a)} = 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ausgestoßen. Die Rakete wird vom Boden senkrecht nach oben geschoßen. Nehmen Sie an, dass der Massestrom des austretenden Gases und damit die Schubkraft konstant sind.
(a) Ist die Schubkraft zu Beginn ausreichend, um die Gewichtskraft zu überwinden, so dass die Rakete nach der Zündung sofort abhebt?
(b) Welche maximale Geschwindigkeit erreicht die Rakete?
(c) Wie lange muss die Zündverzögerung zwischen dem Zeitpunkt, zu dem der Treibstoff verbraucht ist, und dem Zünden der Effektladung sein, damit das Feuerwerk im höchsten Punkt gezündet wird?
d) Wieviel höher wird die Rakete noch steigen, nachdem der Treibstoff verbraucht ist?
Nützliche Zahlenwerte: $g = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\ln(\frac{1}{5}) = -\frac{8}{5}$

Lösung
(a) Für die Schubkraft gilt

$$F_\mathrm{S} = |\frac{dp}{dt}| = \frac{dm_\mathrm{Tr}}{dt} v_\mathrm{a} = \frac{m_\mathrm{Tr}}{T} v_\mathrm{a} = \frac{0{,}2\,\mathrm{kg}}{1\,\mathrm{s}} 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 6\,\mathrm{N} \tag{36}$$

Diese muss der Gewichtskraft entgegenwirken.

$$F_\mathrm{G} = (m_\mathrm{R} + m_\mathrm{E} + m_\mathrm{Tr})g = 0{,}25\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 2{,}5\,\mathrm{N} \tag{37}$$

Die Rakete hebt also sofort ab.
(b) Für die maximale Geschwindigkeit gilt, dass die Beschleunigung Null ist. Unter Berücksichtigung der Erdanziehung lässt sich das schreiben als

$$M_\mathrm{R}(t) dv_\mathrm{R} = -dm_\mathrm{Tr} v_\mathrm{a} - M_\mathrm{R}(t) g dt \tag{38}$$

mit $dm_\mathrm{Tr} = -dM_\mathrm{R}$

$$dv_\mathrm{R} = \frac{dM_\mathrm{R}}{M_\mathrm{R}} v_\mathrm{a} - g dt \tag{39}$$

Mit Integration über die Brenndauer ergibt sich dann

$$v_{\mathrm{Ende}} = v_{\mathrm{a}} \ln \frac{M_{\mathrm{Ende}}}{M_0} - gT = v_{\mathrm{a}} \ln \frac{m_{\mathrm{R}} + m_{\mathrm{E}}}{m_{\mathrm{R}} + m_{\mathrm{E}} + m_{\mathrm{Tr}}} - gT = 38\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{40}$$

(c) Geschwindigkeit nach Ende der Brenndauer:

$$v(t) = v_{\mathrm{Ende}} - gt \tag{41}$$

Maximale Höhe bei $v = 0$.

$$0 = v_{\mathrm{Ende}} - g\Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{v_{\mathrm{Ende}}}{g} = 3{,}8\,\mathrm{s}. \tag{42}$$

(d) kin. Energie bei $t = T \rightarrow$ pot. Energie bei maximaler Höhe

$$W_{\mathrm{kin}}(T) = W_{\mathrm{pot},\Delta h} \rightarrow \frac{1}{2} M_{\mathrm{R}}(T) v_{\mathrm{Ende}}^2 = M_{\mathrm{R}}(T) g \Delta h \rightarrow \Delta h = \frac{v_{\mathrm{Ende}}^2}{2g} \approx 80\,\mathrm{m}. \tag{43}$$

7 Klotz

Ein Klotz der Masse $m = 1\,\mathrm{kg}$ gleite auf zwei schiefen Ebenen auf und ab. Die linke Ebene sei reibungsfrei und um den Winkel $\alpha = 30°$ gegenüber der Horizontalen geneigt, die rechte Ebene sei um den Winkel β gegen die Horizontale geneigt und besitze den Gleitreibungskoeffizienten $\mu_{\mathrm{g}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Energieverluste und Sprünge am Knick werden vernachlässigt.
(a) Der Klotz wird auf der linken Ebene am Punkt h_1 losgelassen. Bestimmen Sie allgemein die Höhe h_2 auf der rechten Ebene, die der Klotz nach einmaligem Hinab- und Hinaufgleiten maximal erreicht. Welche Höhe h_3 auf der linken Ebene erreicht der Klotz nach nochmaligem Hinab- und Hinaufgleiten?
(b) Berechnen sie h_2 und h_3 explizit für $\beta = 60°$ und $h_1 = 40\,\mathrm{cm}$.
(c) Wie müsste der Winkel β gewählt werden, damit der Körper nach dem Abgleiten von der rechten Ebene im Knick zur Ruhe kommt?
(d) Was passiert, wenn die rechte Ebene einen Haftreibungskoeffizienten $\mu_{\mathrm{H}} = 1$ hat
(i) für einen Neigungswinkel $\beta = 40°$?
(ii) für einen Neigungswinkel $\beta = 50°$?

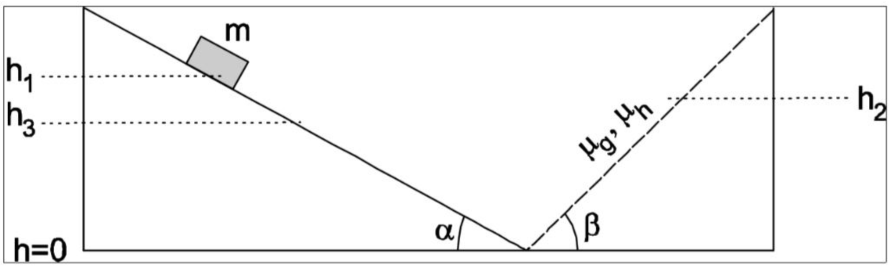

Abbildung 5: Klotz

Lösung

(a) Es gilt Energieerhaltung

$$mgh_1 = mgh_2 + \mu_\mathrm{g} N s_2, \tag{44}$$

wobei s_2 die Wegstrecke auf der zweiten Ebene beschreibt und N die Normalkraft.

$$N = mg\cos(\beta) \tag{45}$$

$$s_2 = \frac{h_2}{\sin(\beta)} \tag{46}$$

Dies eingesetzt führt zu

$$mgh_1 = mgh_2 + \mu_\mathrm{g} mg\cos(\beta)\frac{h_2}{\sin(\beta)} \tag{47}$$

Nach Kürzen von mg und Umformen nach h_2 folgt

$$h_2 = \frac{h_1}{1 + \frac{\mu_\mathrm{g}}{\tan(\beta)}} \tag{48}$$

Für h_3 lässt sich analog zu eben die Energieerhaltung anwenden.

$$mgh_2 = \mu_\mathrm{g} N s_2 + mgh_3 \tag{49}$$

Es gilt weiterhin, dass die Gleitreibungsarbeit der Differenz zwischen den vorherigen Höhenenergien entspricht.

$$\mu_\mathrm{g} N s_2 = mg(h_1 - h_2) \tag{50}$$

Dies lässt sich nun nach h_3 auflösen.

$$h_3 = 2h_2 - h_1 = h_1\left(\frac{\tan(\beta) - \mu_\mathrm{g}}{\tan(\beta) + \mu_\mathrm{g}}\right) \tag{51}$$

(b) Setzt man die Werte in die Formeln für die beiden Höhen ein, so ergibt sich

$$h_2 = 0{,}3\,\mathrm{m} \tag{52}$$

$$h_3 = 0{,}2\,\mathrm{m} \tag{53}$$

(c) Damit der Klotz im Knick zur Ruhe kommt, muss β so gewählt werden, dass $h_3 = 0\,\mathrm{m}$ ist. Also

$$0 = h_1\left(\frac{\tan(\beta) - \mu_\mathrm{g}}{\tan(\beta) + \mu_\mathrm{g}}\right) \rightarrow \tan(\beta) = \mu_\mathrm{g} \tag{54}$$

$$\beta = 30^\circ \tag{55}$$

(d) Bei Haftreibung gilt für den maximalen Winkel, an dem die Haftreibung ein Wegrutschen verhindert, dass

$$\tan(\beta) = \mu_\mathrm{H} \tag{56}$$

Für $\mu_\mathrm{H} = 1$ bedeutet dies, dass $\beta = 45^\circ$. Damit rutscht bei einem Neigungswinkel von 40° der Klotz nicht wieder nach unten, bei 50° jedoch schon.

8 Gravitation

(a) Leiten Sie Ausdrücke für das Gravitationspotential $V(r)$ und die Kraft $F(r)$ auf eine Testmasse m aufgrund der Erde (Masse M_E und Radius R_E) her, wenn sich die Testmasse in einem Abstand r vom Erdmittelpunkt befindet ($r > R_\mathrm{E}$). Nehmen Sie die Dichte der Erde als konstant an. (Hinweis: Betrachen Sie die Erde in Kugelschalen der Dicke dR).
(b) Mit welcher Mindestgeschwindigkeit muss ein Satellit von der Erdoberfläche aus gestartet werden, damit er der Erdanziehungskraft entkommen kann? (Vernachlässigen Sie Reibung und Erdrotation und nehmen Sie an, dass die Rakete senkrecht zur Erdoberfläche gestartet wird.)
(c) Zwei identische Satelliten der Masse m befinden sich auf kreisförmigen Umlaufbahnen mit Radius r_1 bzw. r_2, wobei $r_2 > r_1$. Zeigen Sie, dass die Differenz in der Gesamtenergie der Satelliten gegeben ist durch

$$\Delta E = \frac{GM_\mathrm{E}m}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{57}$$

(c) Leiten Sie Ausdrücke für $V(r)$ und $F(r)$ für die Testmasse aus der Teilaufgabe (a) her für den Fall $r < R_\mathrm{E}$. (Hinweis: Der einfachste Weg ist, zuerst die Gravitationskraft auf die Testmasse beim Radius $r < R_\mathrm{E}$ zu berechnen und daraus dann das Potential zu bestimmen. Zu der Gravitationskraft auf die Testmasse tragen nur die Kugelschalen mit einem Radius kleiner als r bei.) Skizzieren Sie mithilfe des Schaubildes $V(r)$ und $F(r)$ als Funktionen.

Lösung
(a) Betrachtet man die Erde bestehend aus konzentrischen Kugelschalen mit dem Volumen $4\pi R^2 dR$, so ergibt sich für jede Masse einer Kugelschale:

$$dM = \frac{4\pi R^2 dR}{\frac{4}{3}\pi R_\mathrm{E}^3} M_\mathrm{E} = \frac{3R^2 M_\mathrm{E}}{R_\mathrm{E}^3} dR \tag{58}$$

Das Potential einer Testmasse beim Radius $r > R_\mathrm{E}$ ist dann

$$V(r) = -\int_{R=0}^{R=R_\mathrm{E}} \frac{GdM}{r} = -\frac{3GM_\mathrm{E}}{rR_\mathrm{E}^3}\int_{R=0}^{R=R_\mathrm{E}} R^2 dR = -\frac{GM_\mathrm{E}}{r} \tag{59}$$

Für die Kraft gilt darausfolgend dann

$$F(r) = -m\frac{dV(r)}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{GmM_\mathrm{E}}{r}\right) = -\frac{GmM_\mathrm{E}}{r^2}. \tag{60}$$

(b) Für die Gesamtenergie des Satelliten gilt

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_\mathrm{E}}{R_\mathrm{E}} \tag{61}$$

Für eine Flucht muss gelten

$$\frac{1}{2}mv^2 \geq \frac{GmM_\mathrm{E}}{R_\mathrm{E}} \to v \geq \sqrt{14 \cdot 10^7}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 12\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \tag{62}$$

(c) Die Differenz in den Gesamtenergien der beiden Satelliten ist

$$\Delta E = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GM_\mathrm{E}m}{r_2}\right) - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GM_\mathrm{E}m}{r_1}\right) \tag{63}$$

Da es sich um Kreisbewegungen handelt, ist die Zentripetalkraft gleich der Gewichtskraft.

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GM_\mathrm{E}m}{r^2} \to v^2 = \frac{GM_\mathrm{E}}{r} \tag{64}$$

Die Behauptung folgt mit Einsetzen.
(d) Anteil der Masse innerhalb des Radius:

$$M_\mathrm{Anteil} = M_\mathrm{E}\frac{r^3}{R_\mathrm{E}^3} \tag{65}$$

$$F(r) = -\frac{GM_\mathrm{E}mr}{R_\mathrm{E}^3} \tag{66}$$

Über Integration ergibt sich dann das Potential

$$V(r) = -\int \frac{F(r)}{m}dr = \frac{GM_\mathrm{E}}{R_\mathrm{E}^3}\int r dr = \frac{GM_\mathrm{E}r^2}{2R_\mathrm{E}^3} + C, \tag{67}$$

C ist hier die Integrationskonstante. Diese berechnet sich über die Stetigkeitsbedingung bei $r = R_\mathrm{E}$:

$$V(R_\mathrm{E}) = -\frac{GM_\mathrm{E}}{R_\mathrm{E}} = \frac{GM_\mathrm{E}r^2}{2R_\mathrm{E}^3} + C \tag{68}$$

$$C = -\frac{3GM_\mathrm{E}}{2R_\mathrm{E}} \tag{69}$$

$$V(r) = -\frac{GM_\mathrm{E}}{2R_\mathrm{E}^3}(3R_\mathrm{E}^2 - r^2). \tag{70}$$

Alternative Lösung: $dM = \frac{3R^2M_\mathrm{E}}{R_\mathrm{E}^3}dR$

$$V(r) = -\frac{3M_\mathrm{E}G}{R_\mathrm{E}^3 r}\int_{R=0}^{R=r} R^2 dR - \frac{3M_\mathrm{E}G}{R_\mathrm{E}^3}\int_{R=r}^{R=R_\mathrm{E}} R dR = -\frac{GM_\mathrm{E}}{2R_\mathrm{E}^3}(3R_\mathrm{E}^2 - r^2) \tag{71}$$

$$F(r) = -m\frac{dV(r)}{dr} = -\frac{GM_\mathrm{E}mr}{R_\mathrm{E}^3} \tag{72}$$

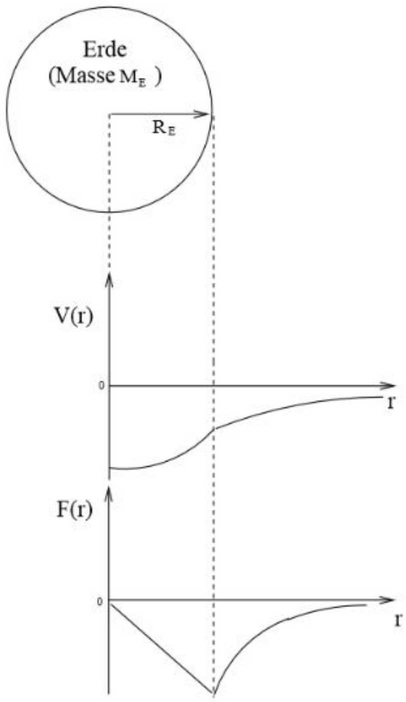

Abbildung 6: Gravitation