Probeklausur - 5.4.19 Lösung

1 Induktion (5 Punkte)

Man zeige mit vollstängider Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

wobei $n! = \prod_{l=1}^{n} l$ die Fakultät für $n \in \mathbb{N}$ definiert.

Lösung

1. I.B: $\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$ **1 Punkt**
2. I.A $n = 1$ ergibt: $\sum_{k=0}^{1} k \cdot k! = 0 \cdot 0! + 1 \cdot 1! = 1 = 2 - 1 = (1+1)! - 1$ **1 Punkt**
3. I.S $n \to n+1$ ergibt:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k \cdot k! \overset{\textbf{1 Punkt}}{=} (n+1) \cdot (n+1)! + \sum_{k=0}^{n} k \cdot k! \underset{I.B}{\overset{\textbf{1 Punkt}}{=}} (n+1) \cdot (n+1)! + (n+1)! - 1$$
$$= (n+1+1) \cdot (n+1)! - 1 = (n+2)(n+1)! - 1 \overset{\textbf{1 Punkte*}}{=} (n+2)! - 1$$

Bemerkung zur Lösung:
Nach benutzen von I.B **1 Punkt**, falls Ergebniss richtig, sonst keinen.

2 Supremum und seine Freunde (4 Punkte)

(a) Geben Sie eine Menge mit ihrem endlichem Supremum und Infimum an, die weder Minimum noch Maximum hat.

(b) Hat die Menge $\{\sin(k/n) | k, n \in \mathbb{N}\}$ ein Maximum? Was ist ihr Supremum? Begründen Sie.

(c) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D sowie den zugehörigen Wertebereich W der Funktion $\arctan(x/2)/2$ an (ohne Begründung).

Lösung

(a) Beispiel: $\{1/n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{2 - 1/n | n \in \mathbb{N}\}$ hat Infimum 0 und Supremum 2. Da diese beide nicht in der Menge enthalten sind, hat sie weder Minimum noch Maximum.
1 Punkt

(b) Die Menge hat das Supremum 1, da es eine Folge von rationalen Zahlen gibt, die gegen π konvergiert (Dichtheit von $\mathbb{Q}$), für diese konvergiert ihr Sinus gegen 1 (Stetigkeit des Sinus). Der Sinus ist jedoch auch beschränkt durch 1. Die Menge hat kein Maximum, da das Supremum nur für $k/n = N \cdot \pi/2$, $N \in \mathbb{N}$ (notwendig) angenommmen wird, was für die irrationale Zahl π nicht möglich ist. **2 Punkte**

(c) $D = \mathbb{R}$, $W = (-\pi/4, \pi/4)$ **1 Punkt**

3 Komplexe Zahlen (4 Punkte)

Bestimmen Sie $r \in [0, \infty)$, $\phi \in [0, 2\pi)$ sodass gilt:

(a) $\frac{1-i}{1+i} = re^{i\phi}$

(b) $\left(i + re^{i\phi}\right) = -2i$

Zeige: $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$

Lösung

(a) $r = 1$, $\phi = 3\pi/2$ **1 Punkt**

(b) $r = 3$, $\phi = 3\pi/2$ **1 Punkt**

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = (z+w)(\overline{z} + \overline{w}) + (z-w)(\overline{z} + \overline{w}) =$$
$$|z|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w + |w|^2 + |z|^2 - z\overline{w} - w\overline{z} + |w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

2 Punkte

4 Folgen und Konvergenz (7 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge. Die Teilfolgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ seien durch $b_n := a_{2n}$ und $c_n := a_{2n+1}$ definiert.

(a) Zeigen Sie: Konvergieren $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beide gegen a, so konvergiert auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen a. Tipp: Benutzen Sie das ϵ-Kriterium und betrachten Sie zuerst die beiden Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ an, sodass die beiden Teilfolgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergieren, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aber nicht.

(c) Berechnen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n^2 + 4n - 3} + 6n - 4}{n+3}$$

Lösung

(a) Nach Voraussetzung konvergieren die beiden Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen a, d.h.

$$\forall \epsilon \exists N_1(\epsilon) \forall n \geq N_1(\epsilon) : |b_n - a| < \epsilon$$
$$\forall \epsilon \exists N_2(\epsilon) \forall n \geq N_2(\epsilon) : |c_n - a| < \epsilon$$

Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gilt: **2 Punkte**

$$|b_n - a| < \epsilon \forall n \geq N_1(\epsilon) \wedge |c_n - a| < \epsilon \forall n \geq N_2(\epsilon)$$
$$\Rightarrow (|b_n - a| < \epsilon \wedge |c_n - a| < \epsilon) \, \forall n \geq N(\epsilon) := \max(N_1(\epsilon), N_2(\epsilon))$$
$$\Rightarrow |a_n - a| < \epsilon \forall n \geq 2N(\epsilon)$$

wobei die letzte Implikation gilt, da:

$$a_n = \begin{cases} b_{\frac{n}{2}} & \text{für n gerade} \\ c_{\frac{n-1}{2}} & \text{für n ungerade} \end{cases}$$

2 Punkte

(b) Die Folge $a_n := (-1)^n$ konvergiert nicht, die Teilfolgen $b_n = a_{2n} = 1$ und $c_n = a_{2n+1} = -1$ jedoch als konstante Folgen schon.
Bemerkung: Es reicht das Beispiel anzugeben. **1 Punkt**

(c) Der Grenzwert kann mit Grenzwertarithmetik berechnet werden. Es folgt:

$$\frac{\sqrt{9n^2+4n-3}+6n-4}{n+3} = \frac{n\left(\sqrt{9+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}+6-\frac{4}{n}\right)}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)} \longrightarrow 9$$

2 Punkte

5 Reihen (5 Punkte)

Die Fibonaccifolge ist definiert durch $a_1 = a_2 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ für $n > 2$. Entscheiden Sie begründet, ob folgende Reihen konvergieren:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/a_n$

Berechnen Sie: $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (1/2)^n$ (Hinweis: Cauchy-Produkt)

Lösung
Da die Fibonaccifolge aufsteigt, also $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ...$ und dabei nicht beschränkt ist (z.B. wegen $n-1 \leq a_n$, wie man sich induktiv klar macht), ist a_n keine Nullfolge, $1/a_n$ hingegen schon. Somit folgt: **1 Punkt**

(a) Die Reihe konvergiert nicht, da ihre Glieder keine Nullfolge stellen. **1 Punkt**

(b) Die Reihe konvergiert als alternierende Nullfolge nach dem Leibnizkriterium. **1 Punkt**

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (1/2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\sum_{k=0}^{n} (1/2)^n\right) - (1/2)^n\right] =$$
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (1/2)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} (1/2)^n\right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} (1/2)^n\right) =$$
$$\frac{1}{1-1/2}\frac{1}{1-1/2} - \frac{1}{1-1/2} = 4-2=2$$

2 Punkt

6 Taylorreihen und Taylorpolynome (8 Punkte)

Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \frac{x}{1+x}$ bis zur zweiten Ordnung um $x = 3$.

Zeigen Sie, dass die Koeffizienten der Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{1-e^{x-1}}$ durch die Formel $a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{e^k n!}$ gegeben sind. Geben Sie den Konvergenzradius r der Reihe an.

Lösung Die Ableitungen sind $f'(x) \overset{\textbf{1 Punkt}}{=} \frac{1}{(1+x)^2}$ und $f''(x) \overset{\textbf{1 Punkt}}{=} \frac{-2}{(1+x)^3}$. Damit ergibt sich das Taylorpolynom zweiter Ordnung zu $T_3^2(x) \overset{\textbf{2 Punkte}}{=} \frac{3}{4} + \frac{1}{16}(x-3) - \frac{1}{64}(x-3)^3$.

$$\frac{1}{1-e^{x-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{kx} e^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{e^k n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{e^k n!} \right) x^n$$

3 Punkte

Hierbei wurde im ersten Schritt die geometrische Reihe verwendet. Diese ist absolut konvergent für $e^{x-1} < 1$, also $x < 1$. Der zweite Schritt verwendet die Exponentialreihe, welche für alle x gilt. Im letzten Schritt werden die absolut konvergenten Reihen vertauscht. Damit ist der Konvergenzradius $r = 1$. **1 Punkt**

7 Ableitungen (4 Punkte)

(a) Leiten Sie die Funktion $f(x) = \sin(\cos(x))$ zwei mal ab.

(b) Berechnen Sie: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}}{x}$

Lösung

(a) $f'(x) = -\cos(\cos(x))\sin(x)$
$f''(x) = \sin^2(x)(-\sin(\cos(x))) - \cos(x)\cos(\cos(x))$ **2 Punkte**

(b) Nenner und Zähler gehen jeweils gegen 0. Somit gilt nach l'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{4-x}} - \frac{1}{2\sqrt{4+x}}}{1} = -\frac{1}{2}$$

2 Punkte

8 Integration (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Stammfunktion von $x \cdot e^{\alpha x}$.

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert das Integral: $I_1 := \int_0^{\infty} x \cdot e^{\alpha x} \mathrm{d}x$

(c) Sei nun $\alpha < 0$. Bestimmen Sie den Wert des Integrals:

$$I_n := \int_0^{\infty} x^n \cdot e^{\alpha x} \mathrm{d}x$$

Tipp: n-fache partielle Integration.

Lösung

(a) Mit partieller Integration erhält man:

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{\alpha x}}_{g'(x)} \mathrm{d}x = \frac{x \cdot e^{\alpha x}}{\alpha} - \int \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \mathrm{d}x = \frac{(\alpha x - 1)e^{\alpha x}}{\alpha^2} + C$$

1 Punkt

(b) Mit der in Teilaufgabe (a) berechneten Stammfunktion erhalten wir für das unbestimmte Integral :

$$\int_0^\infty x \cdot e^{\alpha x} \mathrm{d}x = \lim_{b \to \infty} \left[\frac{(\alpha x - 1)e^{\alpha x}}{\alpha^2} \right]_0^b = \lim_{b \to \infty} \frac{(\alpha b - 1)e^{\alpha b}}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2}$$

1 Punkt

Für $\alpha \geq 0$ divergiert das Integral, für$\alpha < 0$ konvergiert es, da:

$$\lim_{b \to \infty} \frac{(\alpha b - 1)}{\alpha^2 e^{|\alpha| b}} + \frac{1}{\alpha^2} = + \frac{1}{\alpha^2}$$

1 Punkt

(c) Durch 1 mal partiell integrieren erhält man:

$$\int_0^\infty \underbrace{x^n}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{\alpha x}}_{g'(x)} \mathrm{d}x \overset{\textbf{1 Punkt}}{=} \underbrace{\left[x^n \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \right]_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty n x^{n-1} \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \mathrm{d}x \overset{\alpha \leq 0}{=} \int_0^\infty n x^{n-1} \frac{e^{\alpha x}}{|\alpha|} \mathrm{d}x$$

folglich gilt für n-maliges partielles integrieren:

$$I_n \underset{n-P.I}{\overset{\textbf{1 Punkt}}{=}} \underbrace{\left[n \cdot \ldots \cdot (n-2) x^{n-(n-1)} \frac{e^{\alpha x}}{|\alpha|^n} \right]_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty n! x^0 \frac{e^{\alpha x}}{|\alpha|^n} \mathrm{d}x = \left[n! \frac{e^{\alpha x}}{|\alpha|^{n+1}} \right]_0^\infty =$$

$$\overset{\textbf{1 Punkt}}{=} \frac{n!}{|\alpha|^{n+1}}$$

9 Fourier-Reihen (7 Punkte)

Gegeben sei die 2π periodische Funktion f mit

$$f(x) = \pi - |x| \qquad \text{für} \qquad -\pi \leq x \leq \pi$$

(a) Man berechne die Fouriersinuskoeffizienten und Fourierkosinuskoeffizienten der zu $f(x)$ zugehörigen Fourierreihe $F_f(x)$.

(b) Bestimme mit Hilfe von Teilaufgabe (a) den Wert der unendlichen Reihe:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots.$$

Lösung

(a) Da f eine gerade Funktion ist, verschwinden die Koeffizienten der Fouriersinusreihe: $b_n = 0$. (Und da der $\sin(x)$ ungerade ist und Integrale mit gleichen Grenzen über ungerade Funktionen verschwinden.) **1 Punkt**

Für die Koeffizenten der Fouriercosinusreihe erhält man:

$$\begin{aligned}
a_0 =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \pi - x\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi \\
a_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = \\
=& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{n}\sin(nx) - \frac{\cos(nx)}{n^2} - \frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \\
=& \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right] = \begin{cases} \frac{4}{\pi n^2} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}
\end{aligned}$$

2 Punkte

Damit erhält man die Fourierreihe $F_f(x)$ zu:

$$F(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos(nx) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}$$

1 Punkt

(b) Da f stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, gilt: $F_f(x) = f(x)\,\forall x$. **1 Punkt**

Damit gilt insbesondere:

$$\pi = f(0) = F(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ...\right)$$

1 Punkt

Umformen liefert

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

1 Punkt