Probeklausur - 5.4.19

1 Induktion (5 Punkte)

Man zeige mit vollstängider Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

wobei $n! = \prod_{l=1}^{n} l$ die Fakultät für $n \in \mathbb{N}$ definiert.

2 Supremum und seine Freunde (4 Punkte)

(a) Geben Sie eine Menge mit ihrem endlichem Supremum und Infimum an, die weder Minimum noch Maximum hat.

(b) Hat die Menge $\{\sin(k/n) | k, n \in \mathbb{N}\}$ ein Maximum? Was ist ihr Supremum? Begründen Sie.

(c) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D sowie den zugehörigen Wertebereich W der Funktion $\arctan(x/2)/2$ an (ohne Begründung).

3 Komplexe Zahlen (4 Punkte)

Bestimmen Sie $r \in [0, \infty)$, $\phi \in [0, 2\pi)$ sodass gilt:

(a) $\frac{1-i}{1+i} = re^{i\phi}$

(b) $\left(i + re^{i\phi}\right) = -2i$

Zeige: $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$

4 Folgen und Konvergenz (7 Punkte)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge. Die Teilfolgen $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ seien durch $b_n := a_{2n}$ und $c_n := a_{2n+1}$ definiert.

(a) Zeigen Sie: Konvergieren $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ beide gegen a, so konvergiert auch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen a. Tipp: Benutzen Sie das ϵ-Kriterium und betrachten Sie zuerst die beiden Folgen $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ an, sodass die beiden Teilfolgen $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergieren, die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ aber nicht.

(c) Berechnen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{9n^2 + 4n - 3} + 6n - 4}{n + 3}$$

5 Reihen (5 Punkte)

Die Fibonaccifolge ist definiert durch $a_1 = a_2 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ für $n > 2$. Entscheiden Sie begründet, ob folgende Reihen konvergieren:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^n \qquad\qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/a_n$$

Berechnen Sie: $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (1/2)^n$ (Hinweis: Cauchy-Produkt)

6 Taylorreihen und Taylorpolynome (8 Punkte)

Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \frac{x}{1+x}$ bis zur zweiten Ordnung um $x = 3$.

Zeigen Sie, dass die Koeffizienten der Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{1-e^{x-1}}$ durch die Formel $a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{e^k n!}$ gegeben sind. Geben Sie den Konvergenzradius r der Reihe an.

7 Ableitungen (4 Punkte)

(a) Leiten Sie die Funktion $f(x) = \sin(\cos(x))$ zwei mal ab.

(b) Berechnen Sie: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}$

8 Integration (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Stammfunktion von $x \cdot e^{\alpha x}$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert das Integral: $I_1 := \int_0^{\infty} x \cdot e^{\alpha x} \mathrm{d}x$?

(c) Sei nun $\alpha < 0$. Bestimmen Sie den Wert des Integrals:

$$I_n := \int_0^{\infty} x^n \cdot e^{\alpha x} \mathrm{d}x$$

Tipp: n-fache partielle Integration.

9 Fourier-Reihen (7 Punkte)

Gegeben sei die 2π periodische Funktion f mit

$$f(x) = \pi - |x| \qquad \text{für} \qquad -\pi \le x \le \pi$$

(a) Man berechne die Fouriersinuskoeffizienten und Fourierkosinuskoeffizienten der zu $f(x)$ zugehörigen Fourierreihe $F_f(x)$.

(b) Bestimme mit Hilfe von Teilaufgabe (a) den Wert der unendlichen Reihe:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots.$$