Lösungsblatt 4

1 Bestimmte Integrale

Bestimmen Sie den Wert des bestimmten Integrals

(a) $\int_0^1 x^3 + 2x^2 - e^x \mathrm{d}x$

(b) $\int_0^1 \ln(e^x + e^x)\mathrm{d}x$

(c) $\int_0^1 (x^3 + 2x)\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x$

(d) $\int_0^{2\pi} x^2 \cos(x)\mathrm{d}x$

Lösung

(a) Man bestimmt

$$\int_0^1 x^3 + 2x^2 - e^x \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 - e^x\right]_0^1 = \frac{23}{12} - e$$

(b) Man bestimmt

$$\int_0^1 \ln(e^x + e^x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(e^x) + \ln(2)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + \ln(2)x\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \ln(2)$$

(c) Mit der Substitution $u(x) = x^2 + 1$ und $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2x}$ erhält man:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^3 + 2x)\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x &\overset{Sub.u}{=} \int_{u(0)}^{u(1)} (x^3 + 2x)\sqrt{u}\frac{\mathrm{d}u}{2x} \overset{x^2=u-1}{=} \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 u^{\frac{3}{2}} - \sqrt{u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[\frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_1^5 = \frac{2}{15}\left(-4 + 11\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

(d) Mithilfe von zweimaliger partieller Integration erhält man:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} x^2 \cos(x)\mathrm{d}x &= \left[x^2\sin(x)\right]_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} x\sin x\mathrm{d}x \\ &= 0 - 2\left(\left[-x\cos(x)\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\cos(x)\mathrm{d}x\right) = -2(-2\pi + 0) = 4\pi\end{aligned}$$

2 Stammfunktion

Bestimmen Sie die Stammfunktion von folgenden Funktionen. Dies kann direkt, mit partieller Integration oder Substitution erfolgen.

(a) (i) $f(x) = \sin^2(x)$ (ii) $g(x) = \sin^2(x)\cos(x)$

(b) (i) $h(x) = \ln(x)$ (ii) $j(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$

(c) $k(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

(d) $l(x) = x \cdot \frac{\arcsin(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}$ Tipp: Substituiere $u = \arcsin(x^2)$.

(e) $m(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}$

(f) $n(x) = \cos(\ln(x))$ Tipp: Mehrfache partielle Integration und Substitution $u = \ln(x)$

Lösung:

(a) (i) Im ersten Schritt integrieren wir partiell und erhalten eine Integralgleichung:

$$\begin{aligned}\int \sin(x)\ \sin(x)\mathrm{d}x &= -\cos(x)\sin(x) - \int -\cos(x)\cos(x)\mathrm{d}x \\ &= -\cos(x)\sin(x) + \int 1 - \sin^2(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Löst man diese Gleichung nach dem integral $\int \sin^2(x)\mathrm{d}x$ auf, erhält man:

$$\int \sin^2(x)\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\cos(x)\sin(x)}{2}$$

(ii) Mit Substitution $u = \sin(x)$ und $\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos(x)}\mathrm{d}u$ erhält man:

$$\int \sin^2(x)\cos(x)\mathrm{d}x = \int u^2\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\sin^3(x) + C$$

(b) (i) Man multipliziert mit 1 und erhält mit partieller Integration erhält mit $f'(x) = 1$ und $g(x) = \ln(x)$:

$$\int 1 \cdot \ln(x)\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C$$

(ii) Man erhält mit $u = ln(x)$ und $\mathrm{d}x = x\mathrm{d}u$

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \ln(\ln(x)) + C$$

(c) Mit Substitution $u = \frac{1}{x}$ und $\mathrm{d}x = -\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$ erhält man:

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\mathrm{d}x = -\int e^u\mathrm{d}u = -e^{\frac{1}{x}} + C$$

(d) Man substituiert: $u = \arcsin(x^2)$ und $\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{1-x^4}}{2x}\mathrm{d}u$ und erhält:

$$\int \frac{x\arcsin(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int u\mathrm{d}u = \frac{[\arcsin^2(x^2)]}{4} + C$$

Bemerkung: Die Ableitung von $\arcsin(x)$ kann man mithilfe der Umkehrabbildung bestimmen: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$. Man erhält also:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(e) Man substituiert: $u = ln(x)$ und d$x = x$du und erhält:

$$\int \frac{\cos(\ln(x))}{x} \mathrm{d}x = \int \cos(u) \mathrm{d}u = \sin(\ln(x)) + C$$

(f) Mit der Substitution $u = \ln(x)$ und d$x = x$du erhält man wegen $x = e^{\ln(x)} \ = e^u$

$$\int \cos(\ln(x)) \mathrm{d}x = \int e^u \cos(u) \mathrm{d}u$$

Nun integriert man partiell mit $f' = e^u$ und $g(x) = \cos(x)$:

$$\int e^u \cos(u) \mathrm{d}u = e^u \cos(u) - \int -e^u \sin(u) \mathrm{d}u$$

und eine zweite Partielle Integration mit $f' = e^u$ und $g(u) = \sin(u)$ für das zweite Integral:

$$\int e^u \sin(u) \mathrm{d}u = e^u \sin(u) - \int e^u \cos(u) \mathrm{d}u$$

Insgesamt also:

$$\int e^u \cos(u) \mathrm{d}u = e^u \cos(u) + e^u \sin(u) - \int e^u \cos(u) \mathrm{d}u$$

Aufgelöst und rücksubstituiert erhält man das gesuchte Integral:

$$\int \cos(\ln(x)) \mathrm{d}x = \frac{x \sin(\ln(x)) + x \cos(\ln(x))}{2} + C$$

3 Integrale und Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Weiterhin gelte $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x \neq 0$. Zeige, dass es dann ein $\xi \in (a, b)$ existiert, do dass gilt:

$$\int_a^\xi f(x) \mathrm{d}x = \int_\xi^b f(x) \mathrm{d}x \tag{1}$$

Lösung:
Idee: Wir zeigen die Existenz einer Nullstellen einer stetigen Hilfsfunktion $G(\xi)$, die die Differenz der beiden Integrale ist. Da die Hilfsfunktion $G(\xi)$ stetig ist, gilt der ZWS und wir müssen nur noch einen Vorzeichenwechsel von $G(\xi)$ zeigen.

Da f Riemann-integrierbar ist, existiert eine stetige Stammfunktion von f:

$$F(\xi) := \int_a^\xi f(x) \mathrm{d}x$$

Wir definieren die Hilfsfunktion $G(\xi)$ als Differenz der Integrale:

$$G(\xi) := \int_a^\xi f(x) \mathrm{d}x - \int_\xi^b f(x) \mathrm{d}x = F(\xi) - (F(b) - F(\xi)) = 2F(\xi) - F(b)$$

welche stetig auf $[a, b]$ ist. Betrachtet man die Hilfsfunktion an den Grenzen erhält man:

$$G(a) = 2F(a) - F(b) \stackrel{*}{=} -F(b) \qquad\qquad G(b) = 2F(b) - F(b) = F(b)$$

mit * wegen: $F(a) = \int_a^a f(x) \mathrm{d}x = 0$ Wegen $F(b) = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \neq 0$ wechselt also die Funktion G das Vorzeichen . Da $G(\xi)$ auf $[a, b]$ stetig ist, gibt es also ein $\xi \in [a, b]$, sodass die Aussage (1) gilt.

4 Uneigentliche Integrale - Standard Abschätzungen

Um Divergenz bzw. Konvergenz von unbestimmten Integralen zeigen zu können, sind einige Standardabschätzungen nötig. Man bestimme deshalb p für folgende Integrale

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \qquad\qquad \text{(b)} \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$$

mit $p > 0$, sodass die Integrale divergieren bzw. konvergieren.

Lösung:

(a) Das erste Integral ist nützlich, um abzuschätzen, ob eine Funktion an einer Polstelle schwach genug ansteigt.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \begin{cases} \overset{p\neq 1}{=} \lim\limits_{a\to 0}\left[\frac{1}{(-p+1)x^{p-1}}\right]_a^1 = \lim\limits_{a\to 0}\frac{1-a^{1-p}}{1-p} = \begin{cases} \overset{p<1}{\Rightarrow} \text{ Konvergent} \\ \overset{p>1}{\Rightarrow} \text{ Divergent} \end{cases} \\ \overset{p=1}{=} \lim\limits_{a\to 0}\left[\ln(x)\right]_a^1 = \lim\limits_{a\to 0}\ln(1) - \ln(a) \Rightarrow \text{ divergent} \end{cases}$$

(b) Das zweite Integral ist praktisch, um abzuschätzen, ob eine Funktion im unendlichen ausreichend stark abfällt.

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim_{b\to \infty}\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \begin{cases} \overset{p\neq 1}{=} \lim\limits_{b\to \infty}\left[\frac{1}{(-p+1)x^{p-1}}\right]_1^b = \lim\limits_{b\to \infty}\frac{b^{1-p}-1}{1-p} = \begin{cases} \overset{p<1}{\Rightarrow} \text{ divergent} \\ \overset{p>1}{\Rightarrow} \text{ konvergent} \end{cases} \\ \overset{p=1}{=} \lim\limits_{b\to \infty}\left[\ln(x)\right]_1^x = \lim\limits_{b\to \infty}\ln(b) - \ln(1) \Rightarrow \text{ divergent} \end{cases}$$

5 Uneigentliche Integrale - Teil 2

Überprüfen Sie, ob folgende integrale absolut konvergieren oder divergieren. Benutzen Sie dazu das Vergleichskriterium und das Minoranten/Majoranten-Kirterium.

(a) $\int_1^\infty \frac{e^{ix}+\cos(x)}{x^2+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

(b) $\int_0^\infty \frac{\sin(x)+\cos^2(x)}{x^2+\sqrt{x}}$

(c) $\int_1^\infty \frac{\tan(\cos(x))}{x^2+\ln(x)}\mathrm{d}x$

(d) $\int_0^\infty \frac{\cos(x)+2}{5x^2+3x}\mathrm{d}x$

Lösung:

(a) Schätzt man den Betrag des Integranden ab:

$$\left|\frac{e^{ix}+\cos(x)}{x^2+\sqrt{x}}\right| \leq \frac{2}{|x^2+\sqrt{x}|} \leq \frac{2}{x^2}$$

erhält man mit dem Majorantenkriterium

$$\int_1^\infty \frac{e^{ix}+\cos(x)}{x^2+\sqrt{x}}\mathrm{d}x \leq \int_1^\infty \frac{2}{x^2}\mathrm{d}x = 1$$

absolute Konvergenz.

(b) Zuerst schätzen wir den Betrag des Integranden ab:

$$\left|\frac{\sin(x)+\cos^2(x)}{x^2+\sqrt{x}}\right| \leq \frac{2}{x^2+\sqrt{x}}$$

und teilen das Integral anschließend in zwei Teile auf:

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin(x)+\cos^2(x)}{x^2+\sqrt{x}}\right| \mathrm{d}x \leq \int_0^\infty \frac{2}{x^2+\sqrt{x}}\mathrm{d}x \overset{*}{\leq} \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{2}{x^2}\mathrm{d}x$$

wobei * wegen $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{a}$ gerechtfertigt ist. Die zwei Teilintegrale konvergieren nach vorheriger Aufgabe. Damit konvergiert das Integral absolut. Bemerkung: Wieso wählt man auf dem Intervall $[0,1]$ die Abschätzung $\frac{2}{x^2+\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ und nicht $\frac{2}{x^2+x} \leq \frac{2}{x^2}$? Beide Funktionen sind zwar Majoranten, die zweite Majorante ist aber zu grob geschätzt und divergiert. Mit der zweiten Majorante kann man dann keine Aussage über das zu betrachtende Integral treffen.

(c) Man schätzt ab:

$$\int_1^\infty \left|\frac{\tan(\cos(x))}{x^2+\ln(x)}\right| \mathrm{d}x \leq \int_1^\infty \frac{\tan(1)}{x^2}\mathrm{d}x < \infty$$

Die erste Abschätzung, da $\cos(x)$ durch 1 beschränkt ist und die zweite nach vorheriger Aufgabe. Damit ist das Integral absolut konvergent.

(d) Man betrachte den Bereich $[0,1]$ und findet als Miniorante

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)+2}{5x^2+3x}\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \frac{1}{5x^2+3x^2}\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

und nach vorheriger Aufgabe divergiert das Integral.

6 Funktionenkonvergenz

Untersuchen Sie folgende Funktionenfolgen mit $D=[0,1]$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. Berechnen Sie $\int_0^1 f_n(x)dx$ und falls die Grenzfunktion f existiert $\int_0^1 f(x)dx$

(a) $f_n(x) = \exp(x)/n^2$

(b) $f_n(x) = \begin{cases} n & x \in (0, \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(c) $f_n(x) = \begin{cases} \exp(nx)/x^n & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Lösung

(a) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = \exp(1) \lim\limits_{n\to\infty} 1/n^2 = 0$, also konvergiert die Funktion gleichmäßig und damit insbesondere punktweise gegen die Nullfunktion.

Für das Integral gilt:

$$\int_0^1 exp(x)/n^2 dx = 1/n^2[\exp(x)]_0^1 = \frac{e-1}{n^2}$$

und das Integral über die Grenzfunktion ist null (folgt sowohl direkt, als auch über den Grenzwert der Integrale wegen gleichmäßiger Konvergenz).

(b) Für festes x gilt entweder $x = 0$ und somit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$ oder $x > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > 1/x$ sodass für alle $n > N$ gilt $f_n(x) = 0$. Damit ist die punktweise Grenzfunktion die Nullfunktion. Für die Integrale gilt

$$\int_0^1 f_n(x)dx = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 0dx = 0.$$

Dies zeigt bereits, dass die Konvergenz nicht gleichmäßig sein kann, da sonst der Grenzwert der Integrale über die Funktionen gleich dem Integral über die Grenzfunktion sein müsste.

(c) Für $x = 0$ ist der Grenzwert der Funktionenfolge gleich 0. Für $x > 0$ ist $\lim_{n\to\infty} \exp(nx)/x^n = \lim_{n\to\infty} (\exp(x)/x)^n = \infty$, da $\exp(x) > x$ für $x > 0$. Damit gibt es keinen punktweisen Grenzwert der Funktionenfolge. Für das Integral über die Grenzfunktion gilt $\int_0^1 \left(\frac{e^x}{x}\right)^n \geq \int_0^1 \frac{e^x}{x} \geq \int_0^1 \frac{1}{x} = \infty$.

7 Funktionenkonvergenz

Finden Sie Beispiele:

(a) Funktionen $f_n(x)$, Mengen A, B, sodass $f_n(x)$ auf A gleichmäßig konvergiert, auf B jedoch nicht.

(b) Funktionen $f_n(x)$, sodass $\int_0^1 f_n(x)dx = n$, das Integral über die punktweise Grenzfunktion jedoch nicht divergiert.

(c) Stetige Funktionen $f_n(x)$, die auf $[0, 1]$ punktweise konvergieren, die aber nicht gleichmäßig konvergieren und für die die Integrale über die Funktionen nicht gegen das Integral über die Grenzfunktion konvergieren.

Lösung

(a) $f_n(x) = x/n$, $A = [0, 1]$, $B = \mathbb{R}$

(b) $f_n(x) = \begin{cases} n^2 & 0 < x < 1/n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(c) $f_n(x) = \begin{cases} 1 + 2n(n-1) * x & x < 1/(2n) \\ 2n - 2n^2 x & 1/(2n) \leq x < 1/n \\ 0 & 1/n \leq x \end{cases}$

Damit ist die Grenzfunktion

$$\begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und damit unstetig. Das Integral über die Grenzfunktion ist 0, die Integrale über die Folgenglieder berechnen sich zu

$$\int_0^{1/2n} 1 + 2n(n-1)xdx + \int_{1/2n}^{1/n} 2n - 2n^2 xdx = \frac{1}{2n} + \frac{2n^2 - 2n}{8n^2} + \frac{2n}{2n} - \frac{6n^2}{8n^2} \to \frac{1}{2}$$

8 Matrixexponential

Bestimme $exp(A)$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tipp: Betrachte A^k.

Lösung
Bemerkung zum Vorgehen: Das Matrixexponential ist analog zur reellen Exponentialfunktion:

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \mathbb{1} + A + \frac{A^2}{2} + ...$$

Das Matrixexponetntial einer belibigen Matrix kann folgendermaßen bestimmt werden:

(1) Der Weg über die Jordan-Normalform funktioniert immer:
Sei $A = BJB^{-1}$ und $J = D + N$, wobei B die Jordanbasiswechselmatrizen sind und D eine Diagonalmatrix und N eine nilpotente[1] Matrix, dann gilt:

$$\exp(J) = \exp\big(B(D+N)B^{-1}\big) = B\exp(D)\exp(J)B^{-1}$$

(2) Die Matrix lässt sich diagonalisieren $A = SDS^{-1}$ mit der Basiswechselmatrix S. In diesem Fall gilt:

$$\exp(A) = S\exp(A)S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} S^{-1}$$

(3) Man erkennt ein Muster oder die Matrix ist nilpotent. Hier kann man die Exponentialreihe direkt oder induktiv ausrechenen.

In diesem Beispiel wird die Exponentialreihe des Matrixexponentials direkt ausgerechnet, dazu berechnen wir die ersten Potenzen von A^k:

$$\begin{aligned}
A^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A^1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^0 & 2^0 \\ 2^0 & 2^0 \end{pmatrix} \\
A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^1 & 2^1 \\ 2^1 & 2^1 \end{pmatrix} \\
A^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 \\ 2^2 & 2^2 \end{pmatrix} \\
A^4 &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 \\ 2^3 & 2^3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

[1]Eine Matrix ist genau dann nilpotent, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $A^k = 0$ und $A^{k-1} \neq 0$.

Man erkennt (und kann per Induktion beweisen), dass A^k für $k > 0$ von der Form

$$A^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 2^{k-1} \\ 2^{k-1} & 2^{k-1} \end{pmatrix}$$

ist. In die Exponentialreihe eingesetzt ergibt dies:

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} 2^{k-1} & 2^{k-1} \\ 2^{k-1} & 2^{k-1} \end{pmatrix}}{k!}$$

Auswerten der Reihe liefert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k!} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = \frac{1}{2} \left(e^2 - 1\right)$$

und damit erhält man:

$$\exp\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (e^2 - 1) & (e^2 - 1) \\ (e^2 - 1) & (e^2 - 1) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^2 + 1 & e^2 - 1 \\ e^2 - 1 & e^2 + 1 \end{pmatrix}$$