Übungsblatt 4

1 Bestimmte Integrale

Bestimmen Sie den Wert des bestimmten Integrals

(a) $\int_0^1 x^3 + 2x^2 - e^x \mathrm{d}x$

(b) $\int_0^1 \ln(e^x + e^x)\mathrm{d}x$

(c) $\int_0^1 (x^3 + 2x)\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x$

(d) $\int_0^{2\pi} x^2 \cos(x)\mathrm{d}x$

2 Stammfunktion

Bestimmen Sie die Stammfunktion von folgenden Funktionen. Dies kann direkt, mit partieller Integration oder Substitution erfolgen.

(a) (i) $f(x) = \sin^2(x)$ (ii) $g(x) = \sin^2(x)\cos(x)$

(b) (i) $h(x) = \ln(x)$ (ii) $j(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$

(c) $k(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

(d) $l(x) = x \cdot \frac{\arcsin\left(x^2\right)}{\sqrt{1-x^4}}$ Tipp: Substituiere $u = \arcsin\left(x^2\right)$.

(e) $m(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}$

(f) $n(x) = \cos(\ln(x))$ Tipp: Mehrfache partielle Integration und Substitution $u = \ln(x)$

3 Integrale und Zwischenwertsatz

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Weiterhin gelte $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \neq 0$. Zeige, dass es dann ein $\xi \in (a,b)$ existiert, do dass gilt:

$$\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x = \int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

4 Uneigentliche Integrale - Standard Abschätzungen

Um Divergenz bzw. Konvergenz von unbestimmten Integralen zeigen zu können, sind einige Standardabschätzungen nötig. Man bestimme deshalb p für folgende Integrale

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \qquad\qquad \text{(b)} \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$$

mit $p > 0$, sodass die Integrale divergieren bzw. konvergieren.

5 Uneigentliche Integrale - Teil 2

Überprüfen Sie, ob folgende integrale absolut konvergieren oder divergieren. Benutzen Sie dazu das Vergleichskriterium und das Minoranten/Majoranten-Kirterium.

(a) $\int_1^\infty \frac{e^{ix}+\cos(x)}{x^2+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

(b) $\int_0^\infty \frac{\sin(x)+\cos^2(x)}{x^2+\sqrt{x}}$

(c) $\int_1^\infty \frac{\tan(\cos(x))}{x^2+\ln(x)}\mathrm{d}x$

(d) $\int_0^\infty \frac{\cos(x)+2}{5x^2+3x}\mathrm{d}x$

6 Funktionenkonvergenz

Untersuchen Sie folgende Funktionenfolgen mit $D = [0,1]$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. Berechnen Sie $\int_0^1 f_n(x)dx$ und falls die Grenzfunktion f existiert $\int_0^1 f(x)dx$

(a) $f_n(x) = \exp(x)/n^2$

(b) $f_n(x) = \begin{cases} n & x \in (0, \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(c) $f_n(x) = \begin{cases} \exp(nx)/x^n & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

7 Funktionenkonvergenz

Finden Sie Beispiele:

(a) Funktionen $f_n(x)$, Mengen A, B, sodass $f_n(x)$ auf A gleichmäßig konvergiert, auf B jedoch nicht.

(b) Funktionen $f_n(x)$, sodass $\int_0^1 f_n(x)dx = n$, das Integral über die punktweise Grenzfunktion jedoch nicht divergiert.

(c) Stetige Funktionen $f_n(x)$, die auf $[0,1]$ punktweise konvergieren, die aber nicht gleichmäßig konvergieren und für die die Integrale über die Funktionen nicht gegen das Integral über die Grenzfunktion konvergieren.

8 Matrixexponential

Bestimme $exp(A)$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tipp: Betrachte A^k.