Übungsblatt 3

1 Stetigkeit mit dem $\epsilon - \delta$-Kriterium

Zeigen Sie mit dem $\epsilon - \delta$-Kriterium, dass folgende Funktionen im Punkt x_0 stetig sind:

(a) $f : (0,2) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ mit $x_0 \in (0,2)$.

(b) $f(x) : (-1,1) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ mit $x_0 \in (-1,1)$. Tipp: Dritte Binomische Formel.

2 Glm Stetigkeit

Zeige: Jede lineare Funktion $f(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ist glm. stetig auf $\mathbb{R}$. Benutzen Sie die Definition von glm. stetig.

3 Beweis zur Stetigkeit

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$. Weiterhin sei $f(x_0) > 0$. Zeige, dass dann gilt:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D : f(x) > 0 \tag{1}$$

Tipp: Benutzen Sie das $\epsilon - \delta$-Kriterium. Lösen sie den Betrag $|f(x) - f(x_0)|$ auf und stellen Sie geschickt um.

4 Grenzwertarithmetik

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte falls existent ohne den Satz von l'Hôpital.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)\cos(x)}{x\cos(x) - x^2 - 3x}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-3}{x-1}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 - x}\right)$

(g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\tan^2(x) - \frac{1}{\cos^2(x)}\right)$

5 Fixpunktsatz - Revisited

Zeigen Sie mithilfe des Zwischenwertsatzes:

(a) Die Gleichung $\varphi(x) = x$ mit

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{\frac{x^2+2x-\cos(\pi x)+7}{1+x^2}} \end{cases}$$

besitzt eine Lösung in $\mathbb{R}$.

(b) Jede stetige Funktion $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ mit $a < b$ beistzt einen Fixpunkt, es gibt also ein $x^* \in [a,b]$ mit $\varphi(x^*) = x^*$.

6 Satz vom Maximum und Minimum

Zeige, dass die Funktion $f(x) = \frac{6x^2+x}{x^3+x^2+x+1}$ auf $[1,\infty)$ ein Maximum, aber kein Minimum besitzt. Tipp: Konstruieren Sie eine Kompakte Menge.

7 Ableitungen

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $\exp\left(-x^2\right)$

(b) $\frac{x^2+4}{\sin(x)}$

(c) $\tan(x)$

(d) $\arctan(x)$

(e) $\sin^n(x), n \in \mathbb{N}$

(f) $\ln\left(\frac{\exp(x)}{1+x^2}\right)$

8 l'Hôpital

Berechnen Sie mit Begründung:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{1/x^2}{\exp(1/x)}\right)$

9 Taylorpolynome

Entwickeln Sie bis zu n-ten Ordnung um x_0:

(a) $f(x) = x^2$, $n = 2$, $x_0 = 2$

(b) $g(x) = \frac{1}{1-x^2}$, $n = 4$, $x_0 = 0$

(c) $\exp(x + 2)$, $n = 6$, $x_0 = 0$

(d) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $n = 4$, $x_0 = 0$

10 Taylorreihe

Finden Sie die Taylorreihe der folgenden Funktionen um $x_0 = 0$:

(a) $\exp\left(-x^2/2\right)$

(b) $\frac{1}{1-x}$

(c) $x^4 + 3x^2 + 2x + 1$

(d) $\begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$