Lösungsblatt 2

1 Konvergenzgeschwindigkeit

Sei die Folge $(a_n) = 1 - \frac{2+n}{3+5n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Berechnen Sie numerisch das kleinste N, welches das ϵ-Kriterium für $\epsilon = 0.05$ erfüllt, also sodass $n \geq N$ die Ungleichung $|a_n - a| \leq 0.05$ erfüllt. Bemerkung: Es ist hilfreich erst den Grenzwert auszurechnen.

Lösung:
Den Grenzwert berechnet man mithilfe der Grenzwertarithmetik:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2+n}{3+5n}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{n}+1}{\frac{3}{n}+5}\right) = \frac{4}{5}$$

Um nun das N zu bestimmen, welches das ϵ-Kriterium für $\epsilon = 0.05$ erfüllt zu finden, löst man die Ungleichung:

$$\left|a_n - \frac{4}{5}\right| \leq 0.05 \qquad \forall n \geq N$$

nach n auf:

$$\left|1 - \frac{2+n}{3+5n} - \frac{4}{5}\right| = \left|-\frac{2+n}{3+5n} + \frac{1}{5}\right| \overset{!}{\leq} 0.05$$

Hier ist eine Fallunterscheidung nötig, wir nehmen an das $\frac{1}{5} - \frac{2+n}{3+5n} < 0$ gilt (und überprüfen am Ende, ob das erhaltene n diese Ungleichung löst):

$$\left|-\frac{2+n}{3+5n} + \frac{1}{5}\right| \overset{|.|\leq 0}{=} \frac{-1}{5} + \frac{2+n}{3+5n} \overset{!}{\leq} 0.05$$
$$2+n \leq \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{5}\right)(3+5n) \Rightarrow n \geq 5$$

Dieses n erfüllt die Voraussetzung $\frac{1}{5} - \frac{2+5}{3+25} = -\frac{1}{20} < 0$ und damit gilt $N = 5$
Bemerkung: Dieses Problem kann natürlich auch durch systematisches probieren gelöst werden.

2 Cauchy oder ϵ-Kriterum ?

Beweisen Sie die Konvergenz mit dem jeweils angegebenen Verfahren:

(a) Sei $(a_n) = \frac{2}{n^2}$ für $n \in \mathbb{N}$. Benutze das ϵ-Kriterum, um Konvergenz zu zeigen.

(b) Sei $(b_n) = \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Benutze das Cauchy-Kriterum, um Konvergenz zu zeigen.

(c) Sei $(c_n) = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Benutze das ϵ-Kriterum, um Konvergenz zu zeigen.

(d) Sei $(d_n) = \frac{1}{n^2+n}$ $n \in \mathbb{N}$. Benutze das Cauchy-Kriterum, um Konvergenz zu zeigen.

Lösungen:

(a) Es handelt sich offensichtlich um eine Nullfolge, der Grenzwert ist also 0. Wir wollen nun zeigen:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \left| \frac{2}{n^2} - 0 \right| = \frac{2}{n^2} < \epsilon$$

Löst man hier nach n auf erhält man $n \geq \sqrt{\frac{2}{\epsilon}}$. Nach dem Archimedischen Axiom existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $N > \sqrt{\frac{2}{\epsilon}}$. Damit lautet der Beweis:
Sei $\epsilon > 0$. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq \sqrt{\frac{2}{\epsilon}}$. Dann gilt für alle $n \geq N$:

$$\left| \frac{2}{n^2} - 0 \right| = \frac{2}{n^2} \leq \frac{2}{N^2} < \epsilon$$

(b) Sei $\epsilon > 0$. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\epsilon}$ und mit $n \geq m \geq N$ gilt:

$$|b_n - b_m| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| = \left| \frac{m-n}{mn} \right| \leq \frac{m}{mn} = \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$$

(c) Man vermutet das der Grenzwert 1 ist und setzt an:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \left| \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1} - 1 \right| < \epsilon$$

Um auf N zu kommen müssen wir umformen:

$$\left| \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1} - 1 \right| = \left| \frac{\sqrt{n}-1-\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1} \right| = \left| \frac{-2}{\sqrt{n}+1} \right| = \frac{2}{\sqrt{n}+1} < \epsilon \Rightarrow \sqrt{n} > \frac{2}{\epsilon} - 1$$

Damit erhält man: $n > N > \left(\frac{2}{\epsilon} - 1\right)^2$ Damit lautet der Beweis:
Sei $\epsilon > 0$. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq \left(\frac{2}{\epsilon} - 1\right)^2$. Dann gilt für alle $n \geq N$:

$$\left| \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1} - 1 \right| = \frac{2}{\sqrt{n}+1} \leq \frac{2}{\sqrt{N}+1} < \epsilon$$

(d) Sei $\epsilon > 0$. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\epsilon}$ und mit $n \geq m \geq N$ gilt:

$$|d_n - d_m| = \left| \frac{m^2+m-n^2-n}{(n^2+n)(m^2+m)} \right| \leq \left| \frac{m^2+m-n^2-n}{(n^2+n)(m^2+m)} \right| \overset{*}{\leq} \left| \frac{1}{n^2+n} \right| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$$

wobei bei * mit $m^2 + m - n^2 - n < m^2 + m$ abgeschätzt wird.

3 Grenzwertarithmetik

Man berechne Folgende Grenzwerte:

(a) (i) $a_n = \frac{7n^4+5n^3+2n^2+n}{14n^4+28n^3}$ (ii) $b_n = \frac{12n^3-7n}{25n^3+\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}$

(b) (i) $c_n = 2 + \frac{5i^n}{2n} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}i\right)^n$ (ii) $d_n = \frac{n^3+(in^2+1)(6+in)}{\frac{i}{6}(n+1)(2n+1)}$ (iii)$e_n = \frac{1-in}{2in+2n}$

(c) $f_n = \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{3n+2}$

(d) $g_n = \frac{1+2+...+n}{n^2}$

(e) $h_n = \sqrt{n^2+5n} - \sqrt{n^2-4n}$

Lösung:

(a) (i) Für die Folge a_n gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^4+5n^3+2n^2+n}{14n^4+28n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{7+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{14+\frac{28}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 7+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty} 14+\frac{28}{n}} = \frac{1}{2}$$

(ii) Für die Folge b_n gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{12n^3-7n}{25n^3+\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{12-\frac{7}{n^2}}{25+\frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 12-\frac{7}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 25+\frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^3}} = \frac{12}{25}$$

(b) (i) Um den Grenzwert von c_n zu berechnen betrachte man die Beträge

$$\left|\frac{5i^n}{2n}\right| = \frac{5}{2n} \to 0 \qquad \left|\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}i)\right)^n\right| = \left(\frac{2}{25}\right)^{\frac{n}{2}} \to 0$$

diese konvergieren gegen null da $|a_n|^n$ eine Nullfolge ist, falls der Betrag der Folgeglieder für fast alle $n \in \mathbb{N}$ kleiner 1 ist. Alternativ überzeugt man sich mit dem ϵ-Kriterium oder dem Sandwichkriterium von dem Grenzwert. Damit erhält amn als Grenzwert nach der Grenzwertarithmetik $\lim_{n\to\infty} c_n = 2+0+0 = 2$ erhalten.

(ii) Für die Folge d_n betrachten wir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+(in^2+1)(6+in)}{\frac{i}{6}(n+1)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{i} \frac{n^3+6in^2-n^3+in+6}{2n^2+3n+1} =$$

$$\frac{6}{i} \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(6i+\frac{i}{n}+\frac{6}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2})} = 18$$

(iii) Um den Grenzwert von e_n zu bestimmen berechnen wir den Realteil und Imaginärteil der Folge:

$$\frac{1-in}{2in+2n} \overset{3.Binom.}{=} \frac{(1-in)(2in-2n)}{(2in+2n)(2in-2n)} = -\frac{2n^2-2n}{8n^2} - i\frac{2n^2+2n}{8n^2}$$

womit $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = -\frac{1}{4} - \frac{i}{4}$ ist.

(c) Für die Folge f_n gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}{3+\frac{2}{n}} = \frac{2}{3}$$

(d) Für die Folge g_n gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+...+n}{n^2} \overset{arithmetische}{\underset{Summenformel}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

Bemerkung: Hier muss man die arithmetische Summenformel anwenden, das ausklammern des Terms n aus allen Summanden ist nicht erlaubt, da die Anzahl der Summanden von n abhängt und damit nicht konstant ist.

(e) Wir erweitern mit der dritten binomischen Formel:

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+5n} - \sqrt{n^2-4n} &= \frac{\left(\sqrt{n^2+5n} - \sqrt{n^2-4n}\right)\left(\sqrt{n^2+5n} + \sqrt{n^2-4n}\right)}{\sqrt{n^2+5n} + \sqrt{n^2-4n}} \\ &= \frac{n^2+5n-(n^2-4n)}{n\sqrt{1+\frac{5}{n}} + n\sqrt{1-\frac{4}{n}}} = \frac{9n}{n\sqrt{1+\frac{5}{n}} + n\sqrt{1-\frac{4}{n}}}\end{aligned}$$

womit wir als Grenzwert $\lim_{n\to\infty} h_n = \frac{9}{2}$ erhalten.

4 Sandwichkriterium

Bestimmen Sie den Grenzwert mithilfe des Sandwichkriteriums.

(a) $b_n = \frac{\sin(n)+\cos(n)}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$

(b) $e_n = \sqrt[n]{4^n + 9^n}$ für $n \in \mathbb{N}$

(c) $h_n = \frac{n^n}{2^{n^2}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Tipp: Man beweise per Induktion: $2^n > n^2\ \forall n > 4$.

Lösung:

(a) Als Minorante benutzen wir die Konstante Folge $a_n = -\frac{2}{n}$ und als Majorante die Folge $c_n = \frac{2}{n}$. Beide Folgen haben den Grenzwert 0 und es gilt:

$$-\frac{2}{n} \le \frac{\sin(n)+\cos(n)}{n} \le \frac{2}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

damit gilt: $b_n \to 0$

(b) Als Minorante benutzen wir die Konstante Folge $d_n = 9$ und als Majorante die Folge $f_n = \sqrt[n]{2 \cdot 9^n}$. Beide Folgen haben den Grenzwert 9 und es gilt:

$$9 = \sqrt[n]{9^n} \le \sqrt[n]{4^n + 9^n} \le \sqrt[n]{9^n + 9^n} \le \sqrt[n]{2 \cdot 9^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 9 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

damit gilt: $e_n \to 9$.

(c) Zuerst die Induktion:
I.B: $2^n > n^2\ \forall n > 4$
I.A : $n = 5$ ergibt: $2^5 = 32 > 25 = 5^2$
I.S: $n \to n+1$ ergibt: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{I.B}{>} 2 \cdot n^2 > (n+1)^2$ da $n^2 > 2n+1\ \forall n > 4$:
I.B $n^2 > 2n+1$
I.A $5^2 = 25 > 11 = 2 \cdot 5 + 1$

I.S: $n \to n+1$ ergibt: $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \overset{I.B}{>} 2n + 1 + 2n + 1 \overset{n>4}{>} 2(n+1) + 1$
Als Minorante wählt man $g_n = 0$ und als Majorante $i_n = \frac{1}{n}$ und erhält:

$$0 \leq \frac{n^n}{2^{n^2}} = \frac{n^n}{(2^n)^n} = \left(\frac{n}{2^n}\right)^n \overset{n>4}{\leq} \left(\frac{n}{n^2}\right)^n = \frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{n}$$

und damit gilt: $h_n \to 0$.

5 Beschränktheit, Monotonie, Infimum, Minimum, Supremum und Maximum

Prüfen Sie, ob folgende Folgen beschränkt sind und untersuchen Sie diese auf Monotonie. Geben Sie dann falls möglich für die Folgen je eine untere und obere Schranken, Infimum, Minimmum, Supremum und Maximum an.

(a) $(a_n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ für $n \in \mathbb{N}_0$

(b) $(b_n) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\left(2 - \frac{n-2}{n^2}\right)$ für $n \in \mathbb{N}$.
Bestimmen Sie hier zusätzlich $\liminf b_n$ und $\limsup b_n$ und geben Sie die konvergenten Teilfolge an.

(c) $(c_n) = n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$ für $n \in \mathbb{N}_0$

Lösung:

(a) Für die Folge (a_n) erhält man:

(i) Die Folge ist beschränkt:

$$|a_n| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right| \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \leq \max_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{1}{n+1}\right) + \max_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{2}$$

Die Folge (a_n) ist also durch $\frac{3}{2}$ nach oben und durch $-\frac{3}{2}$ nach unten beschränkt.

(ii) Zur Monotonie sei angemerkt:

$$\text{Streng monoton fallend } \Leftrightarrow a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Leftarrow a_{n+1} - a_n < 0$$

Wir untersuchen $a_{n+1} - a_n < 0$:

$$\frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = -\frac{2}{3+4n+n^2} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Die Folge ist also streng monoton fallend.

(iii) Untere Schranken sind alle Zahlen kleiner 0, obere Schranken alle Zahlen größer $\frac{3}{2}$, Infimum ist 0 und Minimum wird nicht angenommen, Supremum ist Maximum ist $\frac{3}{2}$.

(b) Für die Folge (b_n) erhält man:

(i) Die Folge ist beschränkt:

$$|a_n| = \left|\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\left(2 - \frac{n-2}{n^2}\right)\right| \overset{|\cos|\leq 1}{\leq} \left|2 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n}\right| \overset{\geq 0}{\leq} 2 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n}$$
$$\leq 2 + \max_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{2}{n^2}\right) - \max_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{n}\right) = 3$$

die Folge ist also nach oben und unten durch ± 3 beschränkt. Bemerkung: Anstatt der $= 2 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n} \geq 0$ -Abschätzung kann man die Dreiecksungleichung :$|x \pm y| \leq |x| + |y|$ benutzten und erhält als Schranke $c = 5$

(ii) Keine Monotonie, da $\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ oszilliert.

(iii) Untere Schranke alle Zahlen kleiner gleich -2, obere Schranke alle Zahlen größer gleich 2, Infimum ist Minimum ist -2, Supremum ist 2 und Maximum wird nicht angenommen.
Da Infimum wird für $n = 2$ und im unendlichen als $\liminf$ angenommen, das Supremum nur als $\limsup$. Man erkennt das der Term $\sim \frac{1}{n^2}$ eine Nullfolge ist und damit der Term $2\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ für die Häufungspunkte interessant ist. Da das Intervall $[0, 2\pi)$ von $n\frac{\pi}{2}$ in 4 Teile zerlegt und der Cosinus 2π periodisch ist untersucht man folgende Teilfolgen:

$$(b_{k_n})_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \begin{cases} b_{4n} := & \cos(2n\pi)\left(2 - \frac{(4n)-2}{(4n)^2}\right) \longrightarrow 2 \\ b_{4n+1} := & \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\left(2 - \frac{(4n)-2}{(4n)^2}\right) \longrightarrow 0 \\ b_{4n+2} := & \cos(2n\pi + \pi)\left(2 - \frac{(4n+2)-2}{(4n+2)^2}\right) \longrightarrow -2 \\ b_{4n+3} := & \cos\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right)\left(2 - \frac{(4n+3)-2}{(4n+3)^2}\right) \longrightarrow 0 \end{cases}$$

Der kleinste Häufungspunkt -2 ist der $\liminf b_n$ (aus Teilfolge b_{4n+2}) und der größte Häufungspunkt $+2$ ist der $\limsup b_n$ (aus Teilfolge b_{4n}).

(c) Für die Folge (c_n) erhält man:

(i) Die Folge ist nicht beschränkt:
Für $c_1 \geq 1$ quadrieren wir die Gleichung $c_n \geq c_1$ und betrachten Gleichheit

$$n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = c_1^2$$

mit der Mitternachtsformel erhält man $n = \pm\sqrt{c_1^2 - 1}$ und damit erhält man: Für beliebiges $c_1 \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}$ mit $N = \sqrt{c_1^2 - 1}$ für $c_1 \geq 1$ und 1 sonst, sodass: $c_n \geq c_1$.

(ii) Die Folge ist streng monoton steigend:

$$\text{z.Z: } (n+1)\sqrt{1 + \frac{1}{(n+1)^2}} \geq n\sqrt{(}1 + \frac{1}{n^2})$$

was äquivalent zu:

$$(n+1)^2\left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right) \geq n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$
$$(n+1)^2 + 1 \geq n^2 + 1 \Leftrightarrow n + 1 \geq n$$

was offensichtlich stimmt.

(iii) Untere Schranke sind alle Zahlen kleiner 0, obere Schranke gibt es nicht, Infimum ist Minimum ist 0, Supremum liegt nicht in $\mathbb{R}$, Maximum existiert nicht.

6 Fixpunktsatz

Man zeige, dass die rekursiv definierten Folgen konvergieren und bestimme ihren Grenzwert.

(a) $a_{n+1} := \frac{a_n}{4} + 2 \;\forall n \in \mathbb{N}_0$ mit $a_0 = 1$

(b) $b_{n+1} = \sqrt{b_n + 6} \;\forall n \in \mathbb{N}$ mit $b_1 = \sqrt{6}$

Tipp: Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Berechnen Sie zuerst einen möglichen Grenzwert mit der Relation: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$. Setzen Sie dafür den Grenzwert mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ an und lösen Sie die Gleichung.

(ii) Zeigen Sie nun Konvergenz. Um Beschränktheit zu zeigen benutzen Sie vollständige Induktion. Monotonie können Sie mithilfe der Beschränktheit abschätzen.

(iii) Machen Sie sich bewusst, dass die Aufgabe nun gelöst ist.

Lösung:
Wir merken an, dass im Falle von konvergenten Folgen gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x \tag{1}$$

Bemerkung: Dies ist ein Spezialfall einer Fixpunktgleichung $\varphi(x^*) = x^*$, der Banachsche Fixpunktsatz gibt Aussage über die Existenz und Eindeutigkeit des Fixpunktes.

(a) Wir berechnen die beiden Grenzwerte in Gleichung (1):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{4} + 2 = \frac{a}{4} + 2$$

Gleichung (1) garantiert uns Gleichheit und man erhält:

$$a = \frac{a}{4} + 2$$

Löst man die Fixpunktgleichung erhält man $a = \frac{8}{3}$. Konvergenz zeigen wir mit dem Satz: Jede monoton fallend/wachsende beschränkte Folge konvergiert.

(i) Beschränktheit: Laut Tipp benutze man Induktion:
I.B : $a_n \leq \frac{8}{3} \;\forall n \in \mathbb{N}$
I.A : $a_1 = 1 \leq \frac{8}{3}$
I.S: $n \to n+1$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{4} + 2 \overset{I.B}{\leq} \frac{\frac{8}{3}}{4} + 2 = \frac{8}{3} \leq \frac{8}{3}$$

womit a_n durch $\frac{8}{3}$ beschränkt ist. (Bem: Eigentlich wurde hier nur nach oben beschränkt gezeigt, nach unten beschränkt folgt durch Monotonie und Startwert.)

(ii) Monotonie:
Wir betrachten: $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{4} + 2 - a_n \overset{|a_n| \le \frac{8}{3}}{\ge} \frac{\frac{8}{3}}{4} + 2 - \frac{8}{3} = 0$$

wobei hier die Beschränktheit (nach oben) benutzt wurde. Damit ist a_n monoton wachsend.

Damit gilt der Satz und die Folge a_n konvergiert gegen $\frac{8}{3}$.

(b) Wir berechnen die beiden Grenzwerte in Gleichung (1):

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \qquad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6 + a_n} \overset{*}{=} \sqrt{6 + \lim_{n\to\infty} b_n} = \sqrt{6+b}$$

wobei * erlaubt ist (Tauschen von Grenzwertbildung und Funktionswertberechnung), da die Wurzelfunktion stetig ist. Man erhält die Fixpunktgleichung:

$$b = \sqrt{6+b} \Leftrightarrow b^2 = 6 + b$$

welches eine quadratische Gleichung ist mit den Lösungen $b_1 = 3$ und $b_2 = -2$. Konvergenz zeigen wir durch Beschränktheit und Monotonie:

(i) Beschränktheit:
I.B : $\sqrt{6} \le b_n \le 3 \ \forall n \in \mathbb{N}$
I.A : $n = 1$ $\sqrt{6} \le a_1 = \sqrt{6} \le 3$
I.S: $n \to n+1$:

$$\sqrt{6} \le a_{n+1} \le 3 \Leftrightarrow \sqrt{6} \le \sqrt{6+a_n} \le \sqrt{6}$$
$$6 \le 6 + a_n \le 9 \Leftrightarrow 0 \le a_n \le 3$$

was nach der I.B stimmt. Damit ist b_n nach unten durch $\sqrt{6}$ und nach oben durch 3 beschränkt.

(ii) Monotonie:
Wir betrachten: $b_{n+1} - b_n$:

$$b_{n+1} - b_n = \sqrt{6 + b_n} - b_n \overset{3.Binom.}{=} \frac{\left(\sqrt{6+b_n} - b_n\right)\left(\sqrt{6+b_n} + b_n\right)}{\sqrt{6+b_n} + b_n} = \frac{6 + b_n - b^2}{\sqrt{6+b_n} + b_n}$$
$$\overset{|b_n|\le 3}{\ge} = \frac{6+3-9}{\sqrt{6+3}+3} = 0$$

wobei hier die Beschränktheit benutzt wurde. Damit ist b_n monoton wachsend.
Es gilt also: $\lim_{n\to\infty} b_n = b > 0$ und damit $b = 3$.

Bemerkung: Es reicht nicht aus, nur den Grenzwert mit dem Fixpunktsatz auszurechnen, dazu ein Beispiel:
Sei $c_{n+1} = c_n^2$. Diese Folge divergiert für $|a_0| > 1$. Die Fixpunktgleichung liefert aber $a^2 = a$ und damit als Lösungen $a = \{0, 1\}$. Diese werden aber nur angenommen für $|a_0| \le 1$, man **muss** also zusätzlich zur Berechnung noch Konvergenz zeigen.

7 Teilfolgen und Häufungspunkte

Sei die Folge $b_n = i^n$ gegeben. Geben Sie alle Teilfolgen mit zugehörigem Häufungspunkt und Limes inferior sowie Limes superior an falls existent.

Lösung:
Wir betrachten folgende Teilfolgen

$$(b_{k_n})_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \begin{cases} b_{4n} := & i^4 \longrightarrow 1 \\ b_{4n+1} := & i^{4+1} \longrightarrow i \\ b_{4n+2} := & i^{4+2} \longrightarrow -1 \\ b_{4n+3} := & i^{4+3} \longrightarrow -i \end{cases}$$

Damit sind die Häufungspunkte $1, i, -1, -i$. Limes Inferior und Limes Superior existieren in dem Sinne nicht, da diese nur für (halb) geordnete Mengen definiert sind. ($\limsup$ ist mit der Bestimmung eines Maximums verknüpft, im komplexen gibt es aber die Relation $>$ nicht.)

8 Konvergenzbeweise

Zeige, dass jede Cauchy-Folge im $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ beschränkt ist.

Lösung:
Sei also $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}, n \mapsto a(n)$ mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ eine Cauchy-Folge, dann gilt für $\epsilon = 1$:

$$|a_n - a_m| < \epsilon = 1 \quad \forall n, m \geq N = N(1)$$

Setze nun $m = N$ Dann gilt für alle $n \geq N$:

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \overset{\Delta-Ungl.}{\leq} |a_n - a_N| + |a_N| \leq 1 + |a_N|$$

Setze nun $M := \max\left\{|a_n|\middle|n \in \mathbb{N}\right\} < \infty$, dann erhält man schließlich:

$$|a_n| \leq \max\{M, |a_N| + 1\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

9 Teleskop Summe

Man berechne die Summen:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)$

Lösung:
Bemerkung: In diesen Beispielen handelt es sich um Teleskop Summen. Dazu kurz folgende Veranschaulichung:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) =$$
$$= a_1 + (a_2 - a_2) + (a_3 - a_3) + \cdots + (a_n - a_n) - a_{n+1} = a_1 - a_{n+1}$$

Summiert man also über die Differenz zweier benachbarter Folgeglieder stellt man fest:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1} \qquad \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$$

Diese Summen bezeichnet man als Teleskopsummen.

(a) Mit $a_k = \frac{1}{k}$ erhält man:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

(b) Mit $a_k = \frac{1}{k}$ erhält man:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} - 1\right) = -1$$

10 Reihen - Existenz

Zeigen Sie, ob die folgenden Reihen (absolut) konvergent sind.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n+3}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n/n}{2^{n+1}}$

(e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln(n)}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{7n^2}$

Lösung

(a) Für $n > 1$ gilt $\frac{1}{4n+3} > \frac{1}{8n}$, also divergiert die Reihe nach dem Minorantenkriterium mit der harmonischen Reihe.

(b) Die Reihe konvergiert nach dem Leibnizkriterium. Da für $n > 1$ gilt, dass $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ konvergiert die Reihe nach dem Minorantenkriterium mit der harmonischen Reihe nicht.

(c) Die Reihe konvergiert nicht, da $\frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}$ keine Nullfolge ist.

(d) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$ konvergiert absolut, da es sich um die geometrische Reihe handelt. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n/n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ divergiert jedoch bestimmt, weshalb auch die gesamte Reihe nicht konvergiert.

(e) Die Reihe konvergiert nach dem Leibnizkriterium, da $\frac{\cos(n\pi)}{\ln(n)} = \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ eine alternierende Nullfolge ist. Sie konvergiert nach dem Minorantenkriterium nicht absolut mit der harmonischen Reihe als Minorante.

(f) Die Glieder stellen keine Nullfolge. Somit kann die Reihe nicht konvergieren.

11 Reihen

Berechnen Sie:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-3^n}{5^{n+1}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n+3^n+4^n}{5^n}$

Lösung

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\right) - 1 = e^2 - 1$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-3^n}{5^{n+1}} = \frac{2}{25} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} - \frac{3}{25} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{2}{25} \cdot \frac{5}{4} - \frac{3}{25} \cdot \frac{5}{2} = -\frac{1}{5}$$
wobei die geometrische Reihe verwendet wurde. Das Auseinanderziehen der Reihe in eine Summe von Reihen wird erst im Nachhinein durch die Existenz der einzelnen Summanden begründet.

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n+3^n+4^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{5^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} - 4 = \frac{5}{4} + \frac{5}{3} + \frac{5}{2} + \frac{5}{1} - 4 = \frac{77}{12}$$

12 Cauchy-Produkt

Zeigen Sie mithilfe der Cauchy-Produktformel für $|q| < 1$:
$$\frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n$$

Lösung Mit der bekannten absolut konvergenten geometrischen Reihe gilt:
$$\frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} q^k \cdot q^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} q^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n$$

13 Sin, Cos und Exp

Rechnen Sie mithilfe der Reihendarstellung von Sinus, Cosinus und der Exponentialfunktion nach, dass die Funktionen auf ganz $\mathbb{C}$ definiert sind.

Lösung

Wir berechnen den Konvergenzradius für die Exponentialfunktion mithilfe des Quotientenkriteriums:
$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \limsup_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$
Damit ist der Konvergenzradius ∞. Die Koeffizienten der Reihendarstellung von Sinus und Cosinus sind durch die der Exponentialreihe beschränkt, also ist ihr Konvergenzradius ebenfalls ∞.