Übungsblatt 2

1 Konvergenzgeschwindigkeit

Sei die Folge $(a_n) = 1 - \frac{2+n}{3+5n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Berechnen Sie numerisch das kleinste N, welches das ϵ-Kriterium für $\epsilon = 0.05$ erfüllt, also sodass $n \geq N$ die Ungleichung $|a_n - a| \leq 0.05$ erfüllt. Bemerkung: Es ist hilfreich erst den Grenzwert auszurechnen.

2 Cauchy oder ϵ-Kriterum ?

Beweisen Sie die Konvergenz mit dem jeweils angegebenen Verfahren:

(a) Sei $(a_n) = \frac{2}{n^2}$ für $n \in \mathbb{N}$. Benutze das ϵ-Kriterum, um Konvergenz zu zeigen.

(b) Sei $(b_n) = \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Benutze das Cauchy-Kriterum, um Konvergenz zu zeigen.

(c) Sei $(c_n) = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Benutze das ϵ-Kriterum, um Konvergenz zu zeigen.

(d) Sei $(d_n) = \frac{1}{n^2+n}$ $n \in \mathbb{N}$. Benutze das Cauchy-Kriterum, um Konvergenz zu zeigen.

3 Grenzwertarithmetik

Man berechne Folgende Grenzwerte:

(a) (i) $a_n = \frac{7n^4+5n^3+2n^2+n}{14n^4+28n^3}$ (ii) $b_n = \frac{12n^3-7n}{25n^3+\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}$

(b) (i) $c_n = 2 + \frac{5i^n}{2n} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}i\right)^n$ (ii) $d_n = \frac{n^3+(in^2+1)(6+in)}{\frac{i}{6}(n+1)(2n+1)}$ (iii)$e_n = \frac{1-in}{2in+2n}$

(c) $f_n = \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{3n+2}$

(d) $g_n = \frac{1+2+...+n}{n^2}$

(e) $h_n = \sqrt{n^2+5n} - \sqrt{n^2-4n}$

4 Sandwichkriterium

Bestimmen Sie den Grenzwert mithilfe des Sandwichkriteriums.

(a) $b_n = \frac{\sin(n)+\cos(n)}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$

(b) $e_n = \sqrt[n]{4^n + 9^n}$ für $n \in \mathbb{N}$

(c) $h_n = \frac{n^n}{2^{n^2}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Tipp: Man beweise per Induktion: $2^n > n^2$ $\forall n > 4$.

5 Beschränktheit, Monotonie, Infimum, Minimum, Supremum und Maximum

Prüfen Sie, ob folgende Folgen beschränkt sind und untersuchen Sie diese auf Monotonie. Geben Sie dann falls möglich für die Folgen je eine untere und obere Schranken, Infimum, Minimmum, Supremum und Maximum an.

(a) $(a_n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ für $n \in \mathbb{N}_0$

(b) $(b_n) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\left(2 - \frac{n-2}{n^2}\right)$ für $n \in \mathbb{N}$.
Bestimmen Sie hier zusätzlich $\liminf b_n$ und $\limsup b_n$ und geben Sie die konvergenten Teilfolge an.

(c) $(c_n) = n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$ für $n \in \mathbb{N}_0$

6 Fixpunktsatz

Man zeige, dass die rekursiv definierten Folgen konvergieren und bestimme ihren Grenzwert.

(a) $a_{n+1} \ := \frac{a_n}{4} + 2 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$ mit $a_0 = 1$

(b) $b_{n+1} = \sqrt{b_n + 6} \ \forall n \in \mathbb{N}$ mit $b_1 = \sqrt{6}$

Tipp: Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Berechnen Sie zuerst einen möglichen Grenzwert mit der Relation: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$. Setzen Sie dafür den Grenzwert mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ an und lösen Sie die Gleichung.

(ii) Zeigen Sie nun Konvergenz. Um Beschränktheit zu zeigen benutzen Sie vollständige Induktion. Monotonie können Sie mithilfe der Beschränktheit abschätzen.

(iii) Machen Sie sich bewusst, dass die Aufgabe nun gelöst ist.

7 Teilfolgen und Häufungspunkte

Sei die Folge $b_n = i^n$ gegeben. Geben Sie alle Teilfolgen mit zugehörigem Häufungspunkt und Limes inferior sowie Limes superior an falls existent.

8 Konvergenzbeweise

Zeige, dass jede Cauchy-Folge im $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ beschränkt ist.

9 Teleskop Summe

Man berechne die Summen:

$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \qquad\qquad \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)$$

10 Reihen - Existenz

Zeigen Sie, ob die folgenden Reihen (absolut) konvergent sind.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n+3}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n/n}{2^{n+1}}$

(e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln(n)}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{7n^2}$

11 Reihen

Berechnen Sie:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-3^n}{5^{n+1}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n+3^n+4^n}{5^n}$

12 Cauchy-Produkt

Zeigen Sie mithilfe der Cauchy-Produktformel für $|q| < 1$:

$$\frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n$$

13 Sin, Cos und Exp

Rechnen Sie mithilfe der Reihendarstellung von Sinus, Cosinus und der Exponentialfunktion nach, dass die Funktionen auf ganz $\mathbb{C}$ definiert sind.