Blatt 1

1 Beweistechniken

(a) Man zeige: Die Summe zweier ungerader ganzer positiver Zahlen ist eine gerade Zahl. Dabei sei 1 die erste ungerade Zahl größer 0.

(b) Man zeige: Die Summe der Quadrate zweier gerader Zahlen ist gerade.

(c) Man zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^2 + n$ gerade.

(d) Man mache sich anhand einer Wahrheitstafel die Äquivalenz:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \tag{1}$$

für A und B beliebige Aussagen noch einmal klar.

(e) Man zeige: Für $l \in \left\{k^2 | k \in \mathbb{N}\right\}$ gilt: Ist l gerade, dann ist auch $\sqrt{l}$ gerade.
(Tipp: Man benutze Kontraposition).

(f) Man zeige: Die Menge der natürlichen Zahlen hat kein größtes Element.
(Tipp: Man benutze Reductio ad absurdum).

2 Surjektivität, Injektivität und Bijektivität

Entscheide durch Beweis oder Gegenbeispiel, ob die Funktionen Injektiv, Surjektiv oder Bijektiv sind:

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \to 2n + 1$

(b) $g : (-\pi, \pi) \to (-5, 5), x \to \cos(x)$

(c) $h : [-2, \infty) \to [-2, \infty), x \mapsto x^2 - 2x - 1$

(d) $i : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^3}{|x|}$

(e) $j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \to \sin(z)$
(Tipp: Schreibe den Sinus als Linearkombinationen aus e-Funktionen.)

3 Verknüpfte Funktionen

Seien M,N und P nichtleere Mengen und $f : M \to N$ und $g : N \to P$ Abbildungen, sodass $g \circ f = g(f(x))$ bijektiv ist. Zeige:

(a) f ist injektiv

(b) g ist surjektiv

4 Umkehrfunktion

Gegeben sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x - 2$.

(a) Skizziere $f(x)$ in einem geeigneten Bereich um den Scheitelpunkt.

(b) Schränke den Definitions und den Wertebereich so ein, dass $f(x)$ bijektiv ist. (Angeben reicht !)

(c) Bestimme die Umkehrabbildung und gebe explizit den Definitions- und Wertebereich von f^{-1} an.

(d) Gebe $f \circ f^{-1}$ und $f^{-1} \circ f$ explizit an.

(e) Skizziere f^{-1} in einem geeigneten Bereich.

5 Induktion

Man beweise per Induktion

(a) $5 + 3^n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 2 teilbar.

(b) $\sum_{k=1}^{n}(k^2 - 1) = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 - 5n)$

(c) $\prod_{k=1}^{n} 3^{2k} = 3^{n(n+1)}$

(d) $\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k$, wobei $x_1, ..., x_n \geq 0$,$n \in \mathbb{N}$ fest.

6 Infimum und Supremum von Mengen

Geben Sie falls möglich für die folgenden Mengen je zwei obere und untere Schranken, Infimum, Minimmum, Supremum und Maximum an.

(a) $\{0, -3, 5, 7\}$

(b) $\{\frac{1}{2n+1} | n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$

(c) $\{\exp(n) | n \in \mathbb{N}\}$

7 Infimum und Supremum bei Funktionen

Geben Sie falls möglich an:

(a) $\inf_{x\in\mathbb{R}} \exp(x)$ und $\min_{x\in\mathbb{R}} \exp(x)$

(b) $\inf_{x\in\mathbb{R}} \arctan(x)$ und $\min_{x\in\mathbb{R}} \arctan(x)$

(c) $\sup_{x\in\mathbb{R}} \sin(x)$ und $\min_{x\in\mathbb{R}} \sin(x)$

(d) $\sup_{x\in\mathbb{R}} x^2$ und $\sup_{x\in[0,1]} x^2$

8 Monotonie

Sind die folgenden Funktionen $f_\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (strikt) monoton? Begründen Sie. Geben Sie sonst eine Einschränkung des Definitionsbereichs an, sodass die Funktionen monoton sind.

(a) $f_1 : x \mapsto x^3$

(b) $f_2 : x \mapsto \sin(x)$

(c) $f_3 : x \mapsto -\exp(x)$

(d) $f_4 : x \mapsto x^3 - x$

Finden Sie ein Beispiel für eine monotone aber nicht streng monotone Funktion.

9 Komplexe Zahlen

Berechnen und stellen Sie in der Form $a + ib$ dar:

(a) $\frac{2}{4+i}$

(b) $e^{i\pi/4} + e^{i3\pi/4}$

(c) $e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}$

(d) $i + e^{i\pi}$

(e) $\frac{3+4i}{e^{i5\pi/4}}$

(f) $|(4+i) \cdot e^{i\pi/13}|$

(g) $\mathrm{Re}(i \cdot (2+2i))$

(h) $\mathrm{Im}(|13/2 \cdot e^{i\pi/5}|)$

(i) $e^{i\pi/4+1}$