Technische Universität München
Fakultät für Mathematik

Übungsklausur

Ferienkurs zu Mathematik für Physiker 1 (Lineare Algebra)

Modul PH 9992

29. März 2019, 10:15 – 11:45 Uhr

Laura Louis, Frederik Schnack

Beispiellösung

Aufgabe 1. Wahr oder Falsch? (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen jeweils mit Ja oder Nein und begründen Sie Ihre Antwort. Antworten ohne Begründung werden, auch wenn sie korrekt sind, nicht gewertet.

(a) Ist die Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Gleichungssystems ein Vektorraum?

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Ist dann f von der Form $f(x) = ax$ für ein $a \in \mathbb{R}$?

(c) Sind $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ linear unabhängig im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$?

(d) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und alle Diagonaleinträge von A sind 0, d.h. $a_{ii} = 0 \ \forall i \in \{1, ..., n\}$. Kann $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ liegen?

(e) Ist die Vereinigung zweier Unterräume stets ein Unterraum?

(f) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum von V. Seien weiter u_1, u_2 in V. Gilt folgende Äquivalenz

$$u_1, u_2 \in U \iff u_1 + u_2 \in U?$$

<u>Lösung:</u>

(a) Nein.
Für ein inhomogenes lineares GLS der Form $Ax = b$ mit $b \neq 0$ ist insbesondere $x = 0$ keine Lösung. Damit liegt $x = 0$ nicht in der Lösungsmenge und somit kann diese auch kein Vektorraum sein.

(b) Ja.
Eine verstärkte Version dieser Aussage wurde auf dem Übungsblatt 7 Hausaufgabe $H22$ bewiesen. Wir wiederholen das Argument:
Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt unter Verwendung der Linearität von f

$$f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1).$$

Also existiert ein solches $a = f(1)$, sodass $f(x) = a \cdot x$.

(c) Ja.
Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ sind linear abhängig über $\mathbb{Q}$, dann existiert ein $a \in \mathbb{Q}$ mit: $\sqrt{2} = a \cdot \sqrt{3}$.
Dieses a ist jedoch eindeutig bestimmt als $a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, doch $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$. Widerspruch zur Annahme! Also muss die Annahme falsch gewesen sein und $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ sind linear unabhängig über $\mathbb{Q}$.

(d) Ja.
Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ besitzt nur Nullen als Diagonaleinträge. Gleichzeitig gilt $\det(A) = -1 \neq 0$ also ist A invertierbar und damit $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

(e) Nein.
Standardbeispiel: Betrachte zwei (unterschiedliche) Ursprungsgeraden als Unterraum des $\mathbb{R}^2$, z.B. $U_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ und $U_2 = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Deren Vereinigung ist kein Unterraum mehr, da diese nicht abgeschlossen ist, denn z.B. gilt: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U_1 \cup U_2$.

(f) Nein.
Es gilt nur die eine Richtung der Äquivalenz. Die Richtung $\Rightarrow$ gilt offensichtlicherweise, da U ein Unterraum. Die Richtung $\Leftarrow$ gilt jedoch im Allgemeinen nicht, wie folgendes Beispiel zeigt:
Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Seien $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$ und $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$. Dann gilt $u_1 + u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U$, aber $u_1 \notin U$ und $u_2 \notin U$.

Aufgabe 2. Darstellungsmatrizen (2 + 4 + 4 + 2 = 12 Punkte)

Seien

$$\mathcal{B} = \{b_1, b_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

geordnete Basen des $\mathbb{R}^2$.

(a) Geben Sie die Basiswechselmatrizen $T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ und $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ an.

Sei $\mathcal{B}^* = \{b_1^*, b_2^*\}$ die Dualbasis zu $\mathcal{B}$.

(b) Geben Sie die Darstellungsmatrix von b_1^* und b_2^* bezüglich der Basis $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^2$ und der Basis $\mathcal{D} = \{1\} \subseteq \mathbb{R}$ an.

(c) Geben Sie die Darstellungsmatrix von b_1^* und b_2^* bezüglich der Basis $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ und der Basis $\mathcal{D} = \{1\} \subseteq \mathbb{R}$ an.

(d) Rechnen Sie die Gleichheit

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(b_1^*) = T_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}} \cdot M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(b_1^*) \cdot T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$$

nach und visualisieren Sie den Zusammenhang in einem Diagramm.

(e) Sind die Basiswechselmatrizen $T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ und $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ invertierbar? Kurze Begründung.

LÖSUNG:

(a) Für die Basiswechselmatrix $T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ schreiben wir wir die Basisvektoren der Basis $\mathcal{B}$ als Linearkombinationen der Basisvektoren aus $\mathcal{C}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Somit ist die Basiswechselmatrix gegeben durch

$$T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix}.$$

Analoge Vorgehensweise für $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Als Basiswechselmatrix erhalten wir

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir bestimmen die Bilder der Basisvektoren b_1 und b_2 unter b_1^*. Dazu schreiben wir die Elemente b_1 und b_2 als Linearkombination der Basisvektoren b_1 und b_2. b_1^* bildet das entsprechende Element auf den Koeffizienten vor dem Basisvektor b_1 ab. Also gilt:

$$b_1^*(b_1) = 1,$$
$$b_1^*(b_2) = 0.$$

Die Darstellungsmatrix von b_1^* bezüglich der Basis $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^2$ und der Basis $\mathcal{D} = \{1\} \subseteq \mathbb{R}$ ist demnach gegeben durch

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(b_1^*) = (1, 0) \in \mathbb{R}^{1\times 2}.$$

Analoge Vorgehensweise für $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(b_2^*)$.

$$b_2^*(b_1) = 0,$$
$$b_2^*(b_2) = 1.$$

Also $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(b_2^*) = (0, 1) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$.

(c) Wir gehen analog zu (b) vor. Wir schreiben die Basisvektoren c_1, c_2 als Linearkombination der Basisvektoren b_1, b_2. Dies haben wir bereits in (a) getan! Demnach können wir die Bilder unter b_1^*, b_2^* direkt ablesen.

$$b_1^*(c_1) = 2,$$
$$b_1^*(c_2) = 4.$$

Wir erhalten

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(b_1^*) = (2, 4) \in \mathbb{R}^{1\times 2}.$$

Ebenso gilt

$$b_2^*(c_1) = -\frac{1}{2},$$
$$b_2^*(c_2) = -2.$$

Also $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(b_2^*) = (-\frac{1}{2}, -2) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$.

(d) Wir rechnen die Gleichheit mit den Ergebnissen der vorherigen Aufgaben nach:

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(b_1^*) = (1, 0)$$
$$T_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}} \cdot M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(b_1^*) \cdot T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = 1 \cdot (2, 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} = (1, 0).$$

Also stimmt die Gleichheit! Das ganze kann in einem Diagramm analog zur Vorlesung visualisiert werden (siehe Besprechung).

(e) Die Invertierbarkeit kann man einfach durch Berechnung der Determinante prüfen.
$\det(T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}) = -\frac{1}{2} \neq 0$. Also ist $T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ invertierbar.
$\det(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}) = -2 \neq 0$. Also ist auch $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ invertierbar.

Bemerkung
Basiswechselmatrizen sind immer invertierbar, sonst könnten Basisvektoren nicht auf Basisvektoren abgebildet werden!

Aufgabe 3. Eigenwerte (2 + 2 + 2 + 1 = 7 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -4 & 6 & -12 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne das charakteristische Polynom von A.

(b) Berechne die Eigenwerte von A über $\mathbb{Q}$.

(c) Berechnen Sie Basen der Eigenräume von A über $\mathbb{Q}$.

(d) Ist A diagonalisierbar über $\mathbb{Q}$? Ist A triagonalisierbar über $\mathbb{Q}$?

<u>Lösung:</u>

(a) Es gilt: $\chi_A(x) = \det(xI_3\text{-}A) = (x\text{-}2)(x^2 + 2)$.

(b) Die einzige rationale Nullstelle von $\chi_A(x)$ ist 2. Die anderen Nullstellen liegen nicht in $\mathbb{Q}$ und müssen/dürfen somit nicht angegeben werden.

(c) Hier muss/darf ebenfalls nur der Eigenraum der einzigen rationalen Nullstelle bestimmt werden. $\mathrm{Eig}(2, A) = \ker(2I_3 \text{ - } A) = \langle(1, 1, 0)\rangle$.

(d) Die Matrix hat genau einen Eigenwert mit Vielfachheit 1 in $\mathbb{Q}$. Insbesondere zerfällt χ_A über $\mathbb{Q}$ nicht in Linearfaktoren. Also ist A weder triagonalisierbar noch diagonalisierbar über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 4. Kern und Bild. (1 + 2 + 2 + 1 = 6 Punkte)

Gegeben ist die Matrix $C := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Die Matrix C kann als eine Matrixabbildung $\phi_C : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^t, x \mapsto Cx$ betrachtet werden.

a) Bestimmen Sie s und t.

b) Welcher der folgenden Vektoren sind in $\operatorname{im}(\phi_C)$, welche nicht? Begründe.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

c) Bestimmen Sie ein von Null verschiedenes Element in $\ker(C)$.

d) Ist ϕ_C eine injektive Abbildung? Ist ϕ_C eine surjektive Abbildung?

LÖSUNG:

a) Nach Definition der Matrixmultiplikation wird C mit Vektoren aus $\mathbb{R}^4$ multipliziert und liefert Vektoren in $\mathbb{R}^3$. Folglich ist $s = 4$ und $t = 3$.

b) Da $\phi_c : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, müssen Vektoren im Bild im $\mathbb{R}^3$ liegen. Desweiteren ist bekannt, dass das Bild genau der Span der Spalten von C ist.

1. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: Der Nullvektor liegt bei einer linearen Abbildung immer im Bild.
2. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: Falsche Dimension, liegt also nicht im Bild.
3. $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$: Ist offensichtlich Linearkombination der Splaten, liegt somit im Bild.
4. $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: Falsche Dimension, liegt nicht im Bild.
5. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$: Liegt nicht im Span der Spalten, da die letzte Zeile eine Nullzeile ist.
6. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$: Falsche Dimension, liegt nicht im Bild.

c) Der dritte Einheitsvektor $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wird auf 0 abgebildet, liegt also im Kern.

d) ϕ_C ist nicht injektiv, da der Kern nicht trivial ist. ϕ_C ist nicht surjektiv, da nur Vektoren mit letzter Komponente $= 0$ im Bild liegen.

Aufgabe 5. Unitärer Vektorraum. (5 Punkte)

Sei V ein unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und sei $U = \{u_1, ..., u_k\} \subseteq V$ eine orthonormale Menge von Vektoren aus V.
Zeigen Sie: Für jeden Vektor $v \in V$ ist

$$w = v - \sum_{i=1}^{k} \langle u_i, v\rangle u_i$$

orthogonal zu jedem u_i.

LÖSUNG:

Es ist für jedes $j = 1, ..., k$ und $v \in V$

$$\begin{aligned}
\langle w, u_j\rangle &= \langle v - \sum_{i=1}^{k} \langle u_i, v\rangle u_i, u_j\rangle \\
&= \langle v, u_j\rangle - \langle \sum_{i=1}^{k} \langle u_i, v\rangle u_i, u_j\rangle \\
&= \langle v, u_j\rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle \langle u_i, v\rangle u_i, u_j\rangle \\
&= \langle v, u_j\rangle - \sum_{i=1}^{k} \overline{\langle u_i, v\rangle} \langle u_i, u_j\rangle \\
&= \langle v, u_j\rangle - \sum_{i=1}^{k} \overline{\langle u_i, v\rangle} \delta_{i,j} \\
&= \langle v, u_j\rangle - \overline{\langle u_j, v\rangle} \\
&= \langle v, u_j\rangle - \langle v, u_j\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6. Lineare Unabhängigkeit. (6 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Beweise:

a) Seien $\{v_1, v_2\} \subset V$ linear unabhängig. Dann sind auch $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$ linear unabhängig.

b) Sei $B = \{b_1, b_2\}$ eine Basis von V. Sei weiter $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit

$$f(b_1) = b_1 + b_2, \quad f(b_2)b_1 - b_2.$$

Dann ist f bijektiv.

LÖSUNG:

a) Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit:

$$\begin{aligned} \lambda(v_1 + v_2) + \mu(v_1 - v_2) &= 0, \\ \iff (\lambda + \mu)v_1 + (\lambda - \mu)v_2 &= 0. \end{aligned}$$

Nach Vorraussetzung sind v_1 und v_2 linear unabhängig, also folgt daraus:

$$\lambda + \mu = 0 \quad \text{und} \quad \lambda - \mu = 0.$$

Durch Addition der beiden Gleichungen erhält man $2\lambda = 0$, also $= 0$. Einsetzen in eine der beiden Gleichungen liefert auch $\mu = 0$. Also sind $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$ linear unabhängig.

b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass f bijektiv ist, wenn f eine Basis von V auf eine Basis von V abbildet. Die Dimension von V ist 2, da $\{b_1, b_2\}$ eine Basis von V ist. Außerdem sind b_1 und b_2 linear unabhängig und mit Aufgabenteil a) folgt, dass $b_1 + b_2$ und $b_1 - b_2$ linear unabhängig sind. Damit ist $\{b_1 + b_2, b_1 - b_2\}$ eine Basis von V und f bijektiv.