

.....  
.....  
Bonus

Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang

Obige Angaben sind richtig:

Unterschrift der Kandidatin / des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN  
Fakultät für Mathematik

Übungsklausur  
Ferienkurs zu Mathematik für Physiker 1  
(Lineare Algebra)

29. März 2019, 10:15 – 11:45 Uhr

Laura Louis, Frederik Schnack

*Hinweise:*

Viel Erfolg! :-)

Punkte

1

2

3

4

5

6

$\Sigma$

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von ..... bis .....

Vorzeitig abgegeben um .....

Besondere Bemerkungen:

.....

Korrektor(en)

Punkte

--

**Aufgabe 1. Wahr oder Falsch? (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 Punkte)**

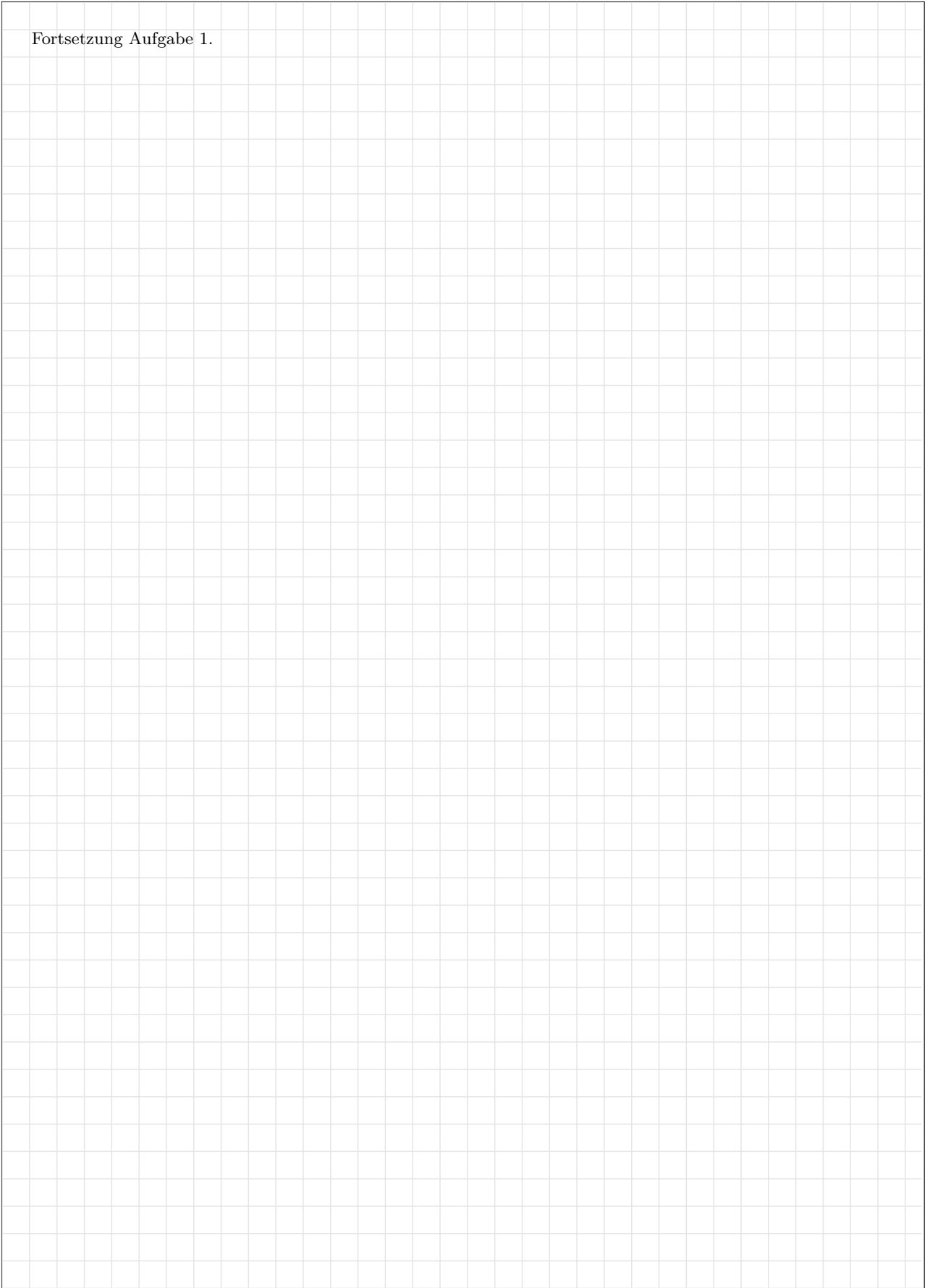
Beantworten Sie die folgenden Fragen jeweils mit Ja oder Nein und begründen Sie Ihre Antwort. Antworten ohne Begründung werden, auch wenn sie korrekt sind, nicht gewertet.

- (a) Ist die Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Gleichungssystems ein Vektorraum?
- (b) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung. Ist dann  $f$  von der Form  $f(x) = ax$  für ein  $a \in \mathbb{R}$ ?
- (c) Sind  $\sqrt{2}$  und  $\sqrt{3}$  linear unabhängig im  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}$ ?
- (d) Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und alle Diagonaleinträge von  $A$  sind 0, d.h.  $a_{ii} = 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$ . Kann  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  liegen?
- (e) Ist die Vereinigung zweier Unterräume stets ein Unterraum?
- (f) Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein Unterraum von  $V$ . Seien weiter  $u_1, u_2$  in  $V$ . Gilt folgende Äquivalenz

$$u_1, u_2 \in U \iff u_1 + u_2 \in U?$$

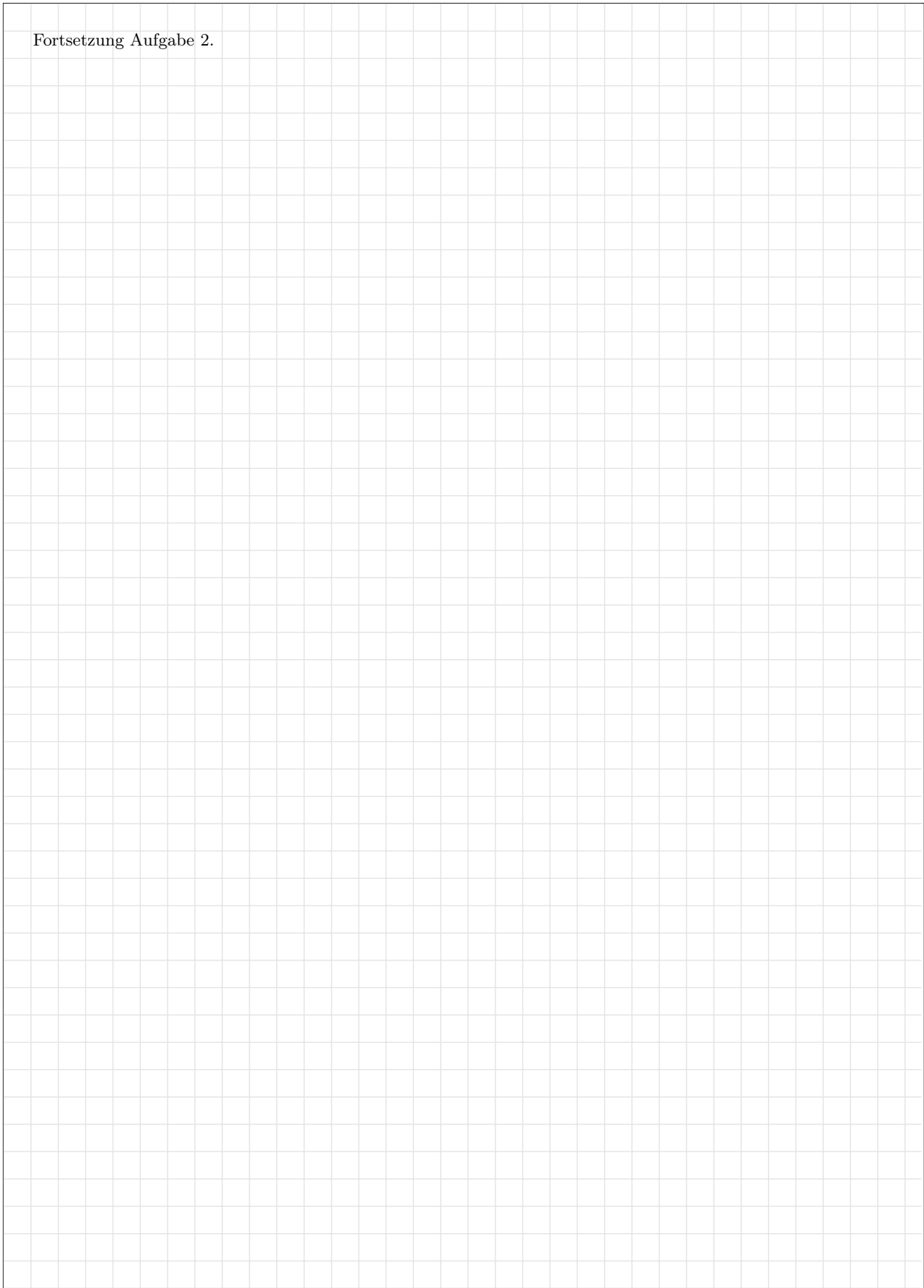
(Fortsetzung ggf. auf der nächsten Seite)

Fortsetzung Aufgabe 1.





Fortsetzung Aufgabe 2.



Punkte

--

**Aufgabe 3. Eigenwerte (2 + 2 + 2 + 1 = 7 Punkte)**

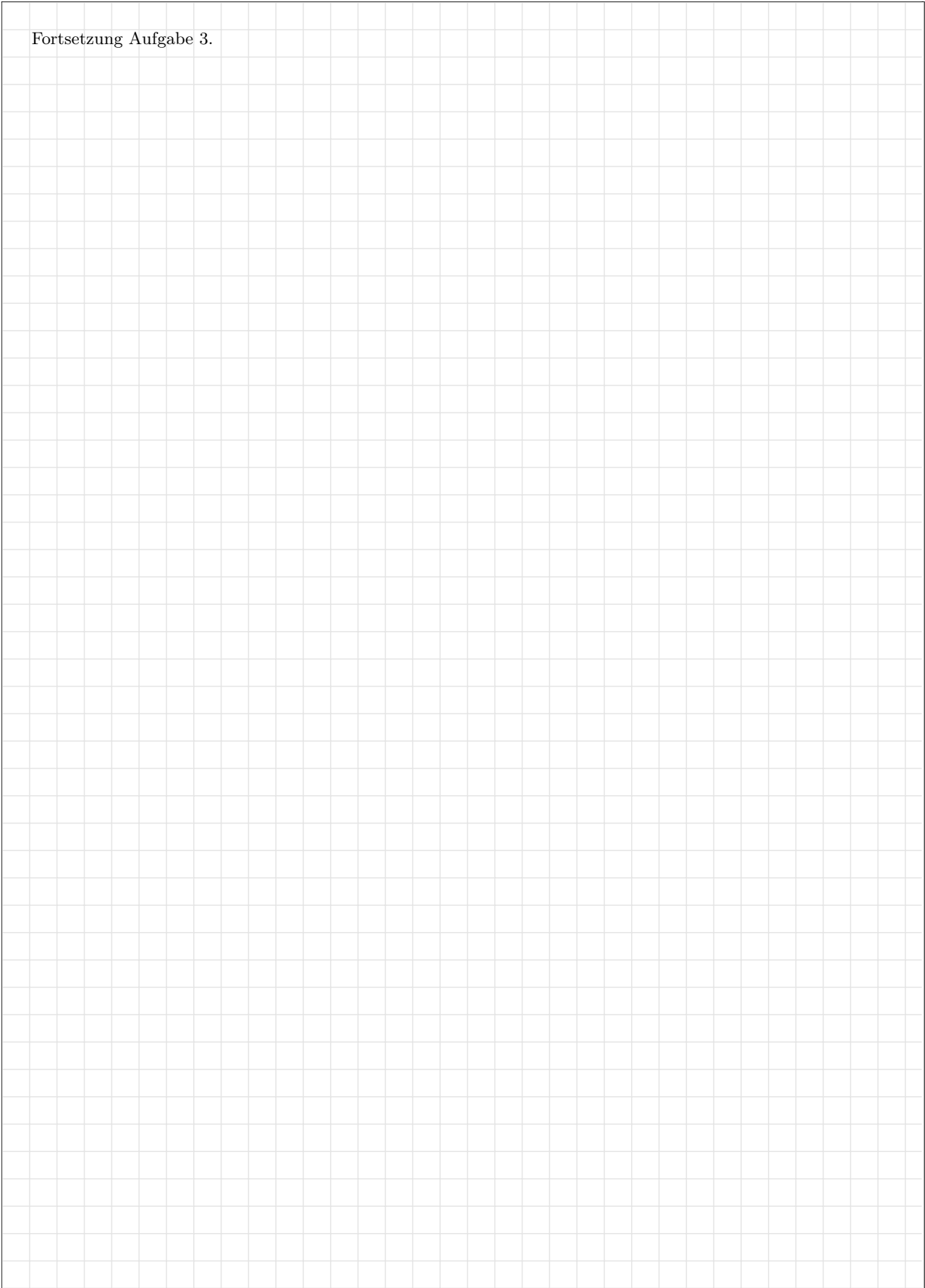
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -4 & 6 & -12 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechne das charakteristische Polynom von  $A$ .
- (b) Berechne die Eigenwerte von  $A$  über  $\mathbb{Q}$ .
- (c) Berechnen Sie Basen der Eigenräume von  $A$  über  $\mathbb{Q}$ .
- (d) Ist  $A$  diagonalisierbar über  $\mathbb{Q}$ ? Ist  $A$  triagonalisierbar über  $\mathbb{Q}$ ?

(Fortsetzung ggf. auf der nächsten Seite)

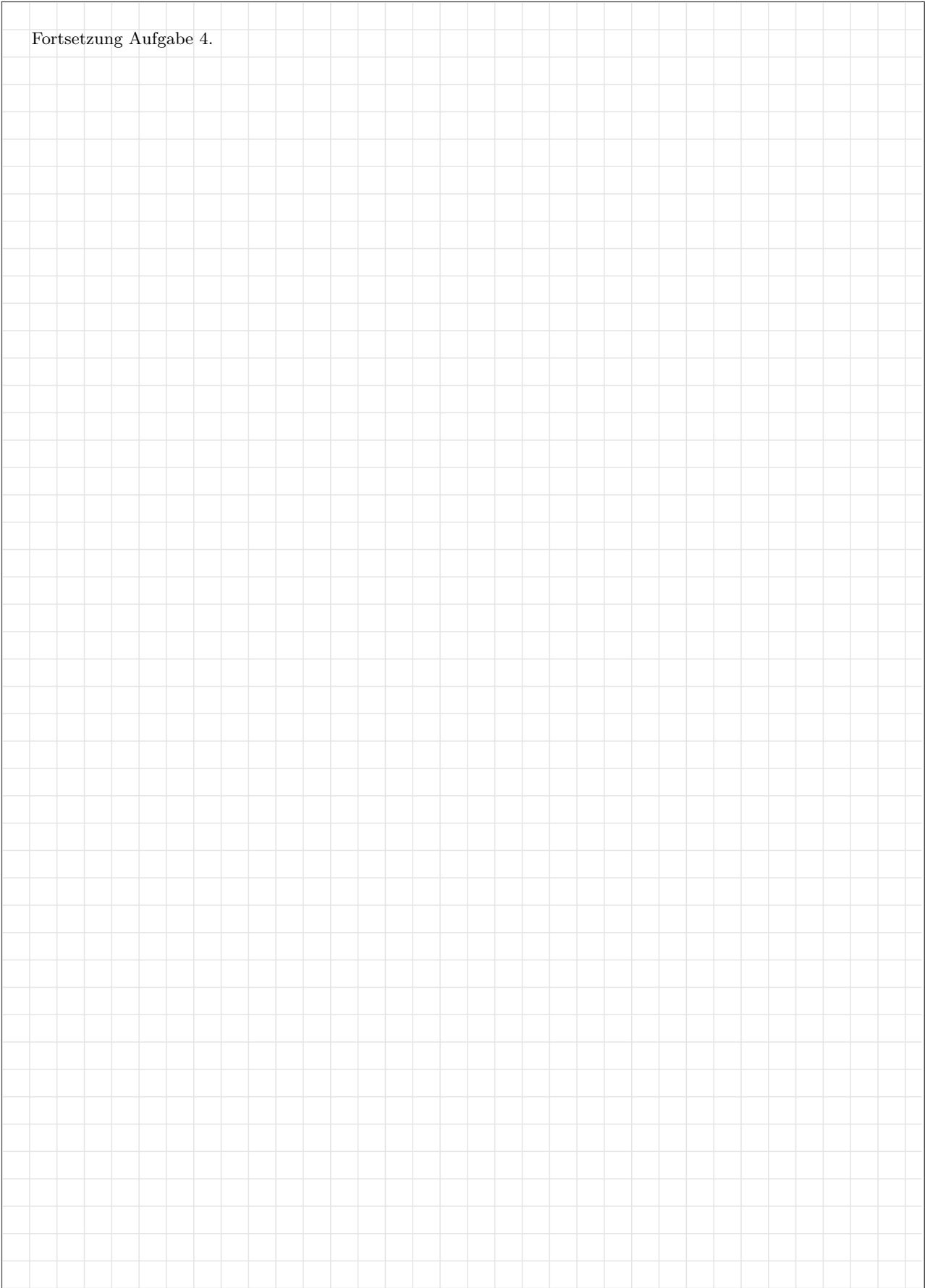
Fortsetzung Aufgabe 3.







Fortsetzung Aufgabe 4.



Punkte

**Aufgabe 5. Unitärer Vektorraum. (5 Punkte)**

Sei  $V$  ein unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und sei  $U = \{u_1, \dots, u_k\} \subseteq V$  eine orthonormale Menge von Vektoren aus  $V$ .

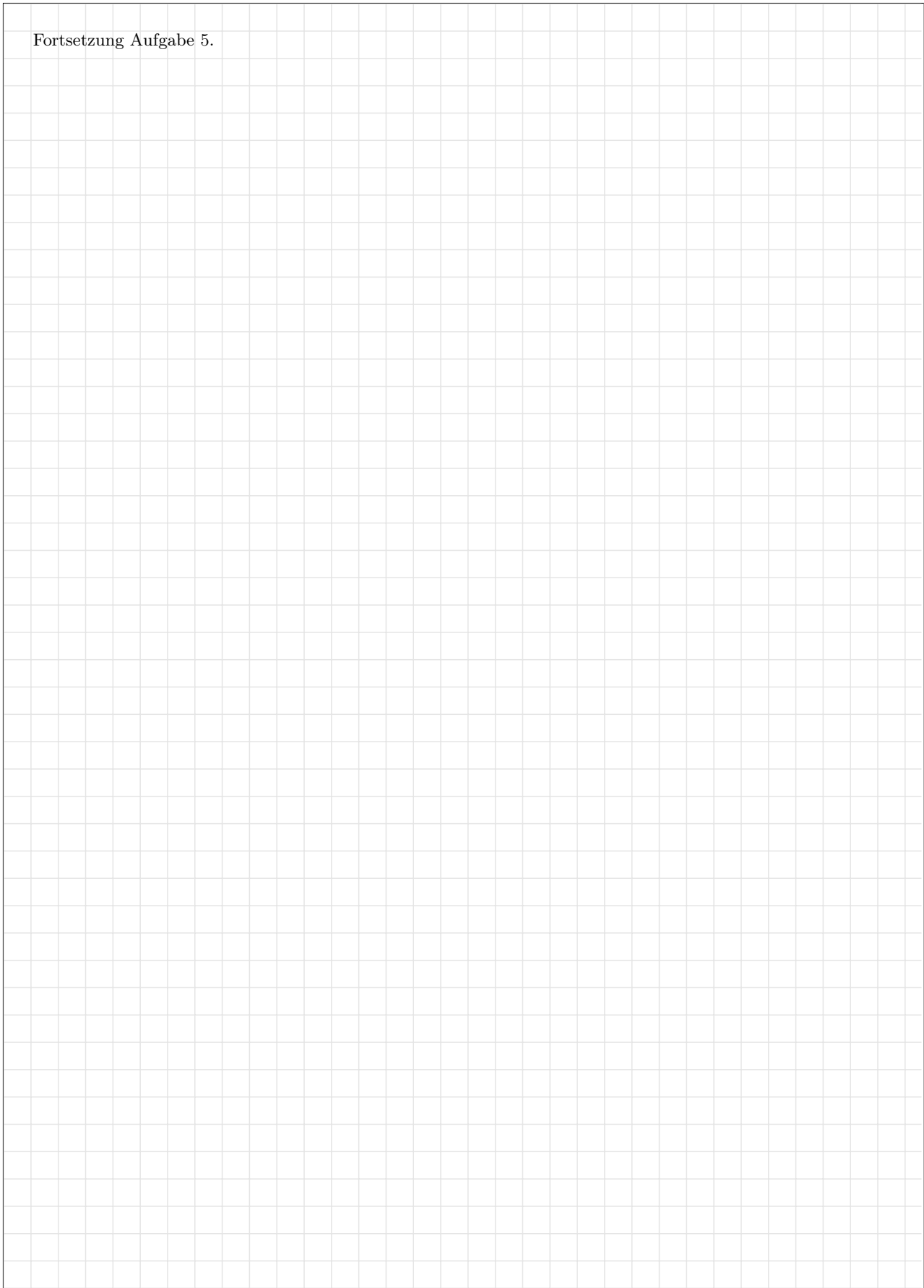
Zeigen Sie: Für jeden Vektor  $v \in V$  ist

$$w = v - \sum_{i=1}^k \langle u_i, v \rangle u_i$$

orthogonal zu jedem  $u_i$ .

(Fortsetzung ggf. auf der nächsten Seite)

Fortsetzung Aufgabe 5.



Punkte

**Aufgabe 6. Lineare Unabhängigkeit. (6 Punkte)**

Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Beweise:

- a) Seien  $\{v_1, v_2\} \subset V$  linear unabhängig. Dann sind auch  $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$  linear unabhängig.
- b) Sei  $B = \{b_1, b_2\}$  eine Basis von  $V$ . Sei weiter  $f : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung mit

$$f(b_1) = b_1 + b_2, \quad f(b_2) = b_1 - b_2.$$

Dann ist  $f$  bijektiv.

(Fortsetzung ggf. auf der nächsten Seite)

Fortsetzung Aufgabe 6.

