.... Bonus

.... Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang

Obige Angaben sind richtig:

Unterschrift der Kandidatin / des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Übungsklausur
Ferienkurs zu Mathematik für Physiker 1
(Lineare Algebra)

29. März 2019, 10:15 – 11:45 Uhr

Laura Louis, Frederik Schnack

Hinweise:

Viel Erfolg! :-)

	Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
6	
$\sum$	

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

....

Korrektor(en)

Punkte

Aufgabe 1. Wahr oder Falsch? (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen jeweils mit Ja oder Nein und begründen Sie Ihre Antwort. Antworten ohne Begründung werden, auch wenn sie korrekt sind, nicht gewertet.

(a) Ist die Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Gleichungssystems ein Vektorraum?

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Ist dann f von der Form $f(x) = ax$ für ein $a \in \mathbb{R}$?

(c) Sind $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ linear unabhängig im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$?

(d) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und alle Diagonaleinträge von A sind 0, d.h. $a_{ii} = 0\ \forall i \in \{1, ..., n\}$. Kann $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ liegen?

(e) Ist die Vereinigung zweier Unterräume stets ein Unterraum?

(f) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum von V. Seien weiter u_1, u_2 in V. Gilt folgende Äquivalenz

$$u_1, u_2 \in U \iff u_1 + u_2 \in U?$$

(Fortsetzung ggf. auf der nächsten Seite)

Fortsetzung Aufgabe 1.

Punkte

Aufgabe 2. Darstellungsmatrizen (2 + 4 + 4 + 2 = 12 Punkte)

Seien

$$\mathcal{B} = \{b_1, b_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

geordnete Basen des $\mathbb{R}^2$.

(a) Geben Sie die Basiswechselmatrizen $T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ und $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ an.

Sei $\mathcal{B}^* = \{b_1^*, b_2^*\}$ die Dualbasis zu $\mathcal{B}$.

(b) Geben Sie die Darstellungsmatrix von b_1^* und b_2^* bezüglich der Basis $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^2$ und der Basis $\mathcal{D} = \{1\} \subseteq \mathbb{R}$ an.

(c) Geben Sie die Darstellungsmatrix von b_1^* und b_2^* bezüglich der Basis $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ und der Basis $\mathcal{D} = \{1\} \subseteq \mathbb{R}$ an.

(d) Rechnen Sie die Gleichheit

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(b_1^*) = T_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}} \cdot M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(b_1^*) \cdot T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$$

nach und visualisieren Sie den Zusammenhang in einem Diagramm.

(e) Sind die Basiswechselmatrizen $T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ und $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ invertierbar? Kurze Begründung.

(Fortsetzung ggf. auf der nächsten Seite)

Fortsetzung Aufgabe 2.

Punkte

Aufgabe 3. Eigenwerte (2 + 2 + 2 + 1 = 7 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -4 & 6 & -12 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne das charakteristische Polynom von A.

(b) Berechne die Eigenwerte von A über $\mathbb{Q}$.

(c) Berechnen Sie Basen der Eigenräume von A über $\mathbb{Q}$.

(d) Ist A diagonalisierbar über $\mathbb{Q}$? Ist A triagonalisierbar über $\mathbb{Q}$?

(Fortsetzung ggf. auf der nächsten Seite)

Fortsetzung Aufgabe 3.

Punkte

Aufgabe 4. Kern und Bild. (1 + 2 + 2 + 1 = 6 Punkte)

Gegeben ist die Matrix $C := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Die Matrix C kann als eine Matrixabbildung $\phi_C : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^t, x \mapsto Cx$ betrachtet werden.

a) Bestimmen Sie s und t.

b) Welcher der folgenden Vektoren sind in $\mathrm{im}(\phi_C)$, welche nicht? Begründe.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

c) Bestimmen Sie ein von Null verschiedenes Element in $\ker(C)$.

d) Ist ϕ_C eine injektive Abbildung? Ist ϕ_C eine surjektive Abbildung?

(Fortsetzung ggf. auf der nächsten Seite)

Fortsetzung Aufgabe 4.

Punkte

Aufgabe 5. Unitärer Vektorraum. (5 Punkte)

Sei V ein unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und sei $U = \{u_1, ..., u_k\} \subseteq V$ eine orthonormale Menge von Vektoren aus V.
Zeigen Sie: Für jeden Vektor $v \in V$ ist

$$w = v - \sum_{i=1}^{k} \langle u_i, v \rangle u_i$$

orthogonal zu jedem u_i.

(Fortsetzung ggf. auf der nächsten Seite)

Fortsetzung Aufgabe 5.

Punkte

Aufgabe 6. Lineare Unabhängigkeit. (6 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Beweise:

a) Seien $\{v_1, v_2\} \subset V$ linear unabhängig. Dann sind auch $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$ linear unabhängig.

b) Sei $B = \{b_1, b_2\}$ eine Basis von V. Sei weiter $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit

$$f(b_1) = b_1 + b_2, \quad f(b_2)b_1 - b_2.$$

Dann ist f bijektiv.

(Fortsetzung ggf. auf der nächsten Seite)

Fortsetzung Aufgabe 6.