Laura Louis, Frederik Schnack


# 4. Übungsblatt zum Ferienkurs Mathematik für Physiker 1

## 1. Normen und Skalarprodukte

### Aufgabe 1 Bilinearformen

Begründen Sie bei den folgenden Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch ist.

a) Es sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $f : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmterische Bilinearform. Dann gilt: $f(v, 0) = 0$ für alle $v \in V$.

b) Es ist $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, ((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) \mapsto x_1 - y_1$ eine Billinearform.

c) Es ist $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, ((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) \mapsto 2x_1y_2 - 3x_2y_2$ eine Billinearform.

d) Es ist $f : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \det(AB)$ eine Billinearform.

**Lösung:**

a) Wahr: $f(v, 0) = f(v, 0 + 0) = f(v, 0) + f(v, 0) \iff 0 = f(v, 0)$,

b) Falsch: $f((2, 0)^T, (1, 0)^T) = 1 \neq 0 = 2f((1, 0)^T, (1, 0)^T)$,

c) Wahr, erkennt man durch nachrechnen.

d) $n = 1$ : Wahr. (Nachrechnen) $n \geq 2$: Falsch, da $f(2I_n, I_n) = det(2I_n) = 2^n \neq 2 = 2det(I_n) = 2f(I_n, I_n)$.

### Aufgabe 2 Skalarprodukte als Matrizen

Welche der folgenden Matrizen definiert ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$?

$$A_1 := \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zur Erinnerung, das induzierte Skalarprodukt ist definiert als $\langle v, w\rangle = v^T A_i w$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$.

**Lösung:**
Die Form des Skalarproduktes impliziert direkt Bilinearität. Alle Matrizen sind symmetrisch, was die Symmetrie des Skalarproduktes zeigt. Somit müssen wir nurnoch positiv Definitheit betrachten: $A_1$ ist nicht positiv definit, da $\det(A_1) = 0$. (Hat somit 0 als Eigenwert)
$A_3$ ist auch nicht positiv Definit, da $e_1^T A_3 e_1 = -4 < 0$.
$A_2$ ist positiv definit, da

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4x^2 + 2xy + y^2 = 3x^2 + (x + y)^2 \geq 0$$

und Gleichheit nur bei $(x, y) = 0$ gilt.
Somit definiert nur $A_2$ ein Skalarprodukt.

### Aufgabe 3 Skalarprodukt für Polynome

Sei $V \subseteq \mathbb{R}[X]$ der Unterraum der Polynome vom Grad $\leq 2$.

a) Zeige, dass die Abbildung

$$(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}, (f,g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt auf $V$ definiert. (Rechenregeln aus der Analysis dürfen verwendet werden)

b) Kontruiere eine Orthonormalbasis von $V$ bezüglich dieses Skalarprodukts.

b) Berechne die Darstellungsmatrix dieses Skalarprodukts bezüglich der Basis $\{1, x, x^2\}$.

**Lösung:**
a) (i) Linearität: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad e, f, g, h \in V$

$$(e + \alpha f, g + \beta h) = \int_0^1 (e(x) + \alpha f(x))(g(x) + \beta h(x))\mathrm{d}x = \int_0^1 (e(x) + \alpha f(x))(g(x) + \beta h(x))\mathrm{d}x$$
$$= (e,g) + \beta(e,h) + \alpha(f,g) + \alpha\beta(f,h)$$

(ii) Symmetrie: $f, g \in V$

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)f(x)\mathrm{d}x = (g,f)$$

(iii) Positivität: Folgt direkt aus der Positivität des Integrals.
b) Wir beginnen mit der Standardbasis $v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2$

$$(1,1) = \int_0^1 1\mathrm{d}x = 1 \longrightarrow w_1 = 1$$

$$w_2^* = x - (1,x)1 = x - \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = x - \frac{1}{2}, \longrightarrow \|w_2^*\|^2 = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 - x + \frac{1}{4}\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \|w_2^*\| = \frac{1}{\sqrt{12}} \longrightarrow w_2 = \sqrt{12}(x - \frac{1}{2})$$

$$w_3^* = v_3 - (v_3, w_2)w_2 - (v_3, w_1)w_1 = x^2 - \sqrt{12}(x - \frac{1}{2}) \int_0^1 x^2 \sqrt{12}(x - \frac{1}{2})\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$$
$$= x^2 - 12(x - \frac{1}{2})(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{3}) - \frac{1}{3} = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \|w_3^*\|^2 = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{6})^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{1}{180}$$

$$w_3 = \sqrt{180}(x^2 - x + \frac{1}{6})$$

c)

$$(1,1) = 1,\ (1,X) = \frac{1}{2},\ (1,X^2) = \frac{1}{3}$$
$$(X,X) = (1,X^2) = \frac{1}{3},\ (X,X^2) = \frac{1}{4}$$

$$(X^2, X^2) = \frac{1}{5}$$

Damit ist die Strukturmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 4 Spur als Skalarprodukt**
Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Spur

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}: \ & M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ & (A, B) \mapsto \mathrm{tr}(AB^T) \end{aligned}$$

ein Skalarprodukt definiert und bestimme eine Orthonormalbasis von $M_2(\mathbb{R})$ bezüglich tr.

**Lösung:**
Wir überprüfen, dass es sich um eine positiv definite Bilinearform handelt:

(i) Positive Definitheit:
Sei $A \in M_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Dann gilt:

$$(A, A) = tr(AA^T) = \sum_{i=1}^{n} [AA^T]_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 > 0$$

(ii) Symmetrie:
Seien $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Dann gilt:

$$(A, B) = tr(AB^T) = tr((AB^T)^T) = tr(BA^T) = (B, A)$$

(iii) Bilinearität:
Seien $A, B, C \in M_n(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$(A+\lambda B, C) = tr((A+\lambda B)C^T) = tr(AC^T+\lambda BC^T) = tr(AC^T)+\lambda tr(BC^T) = (A, C)+\lambda(B, C)$$

(Linearität im zweiten Eingang folgt sofort aus Symmetrie.)

Eine ON-Basis $\mathcal{B}$ von $M_2(\mathbb{R})$ bezüglich $tr$ muss folgende Eigenschaft erfüllen:

$$\forall A, B \in \mathcal{B}: \ (A, B) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij} b_{ij} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} = \begin{cases} 1 \text{ falls } A = B \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Über die Isomorphie $\mathbb{R}^{2\times 2} \cong \mathbb{R}^4$ ist damit klar, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine ON-Basis bezäglich $tr$ ist.

## 2. Orthogonalität

**Aufgabe 5 Orthonormalbasen für Unterräume I**
Finde Orthonormalbasen der Unterräume

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

bezüglich des Standardskalarprodukts.

**Lösung:**
**1. Teil:**

$$U_1 = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subset \mathbb{R}^3$$

$v_1, v_2$ ist per Definition erzeugend und $v_1$ und $v_2$ bereits orthogonal aufeinander.

Für eine ONB muss die vorhandene Basis also nur noch normiert werden:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} v_1$$
$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_2$$

$B = \{u_1, u_2\}$ ist dann eine ONB für $U_1$.

**2. Teil:**

$$U_2 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subset \mathbb{R}^4$$

Wir wenden das Gram-Schmidtsche-Orthogonalisierungsverfahren an. In Anlehnung an Notation des Algorithmus im Physiker-Skript ( (3)Orthogonalisieren, (4)Normalisieren ):

$m = 0,\ i = 1 \quad (3)\ w_1 = v_1, \qquad m = 1, \quad (4)\ u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$i = 1, \quad (3)\ w_2 = v_2 \quad (v_2 \quad \text{bereits} \perp u_1), \qquad m = 2, \quad (4)\ u_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$i = 3, \quad (3)\ w_3 = v_3 - \langle u_1, v_3 \rangle u_1 - \langle u_2, v_3 \rangle u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \qquad (4)\ u_3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$

$B = \{u_1, u_2, u_3\}$ bildet dann eine ONB für $U_2$.

**Aufgabe 6 Orthonormalbasen für Unterräume II**
Bestimme Orthonormalbasen der Lösungsräume folgender Gleichungssysteme als Unterräume des $\mathbb{R}^3$ mit Standardskalarprodukt.

a) $2x + y - z = 0$ und $y + z = 0$,

b) $x - y + z = 0$,

c) $4x + 7y - \pi z = 0$ und $2x - y + z = 0$,

d) $x + y + z = 0, x - y = 0, y + z = 0$.

**Lösung:**

a) $2x + y - z = 0, y + z = 0 \Rightarrow y = -z, 2x = z - y = 2z$, also

$$\ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \Rightarrow B_a = \{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

b) $x - y + z = 0$, also

$$\ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Nutze das Gram-Schmidt-Verfahren und erhalte $B_b = \{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$

c) $4x + 7y - \pi z = 0$ und $2x - y + z = 0$, also

$$\ker \begin{pmatrix} 4 & 7 & -\pi \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & -(2+\pi) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} \pi - 7 \\ 4 + 2\pi \\ 18 \end{pmatrix} \rangle \Rightarrow B_c = \{ \frac{1}{\sqrt{5\pi^2 + 2\pi + 389}} \begin{pmatrix} \pi - 7 \\ 4 + 2\pi \\ 18 \end{pmatrix} \}$$

d) $x + y + z = 0, x - y = 0, y + z = 0$, also

$$\ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \{0\}$$

## Aufgabe 7 Orthogonale Matrix

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sowie der Vektor $b_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ des euklidischen Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt.

a) Bestimme $A^{-1}$. (Hinweis: Name der Aufgabe)

b) Löse das lineare Gleichungssystem $Ax = b_0$.

c) Die Norm eines Vektors $b_1 \in \mathbb{R}^3$ beträgt 2. Bestimme die Norm einer Lösung $y$ des LGS $Ay = b_1$.

d) Ist jede orthogonale Matrix symmetrisch?

**Lösung:**

a) $A$ ist orthogonal (erkennt man nach kurzer Rechnung), also ist $A^T = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

b) Es ist $x = A^{-1}b_0$, also

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

c) $A$ orthogonal, somit eine Isometrie: $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$, also insbesondere längenerhaltend. Damit haben wir $\|y\| = \|Ay\| = \|b_1\| = 2$.

d) Nein, zum Beispiel $A$.

**Aufgabe 8 ($\star$) Orthogonales Komplement**

Sei $V$ ein endl.-dim. unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum und $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Beweise:

a) $U \oplus U^\perp = V$,

b) $(U^\perp)^\perp = U$,

c) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$,

d) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

Hinweis: Beginne mit einer ONB von $U$ und erweitere auf $V$.

**Lösung:**

a) Wir nehmen eine ONB $u_1, \ldots, u_r$ von $U$ und ergänzen das zu einer Basis von $V$. Mittels Gram-Schmidt erhalten wir eine ONB $u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n$ von $V$. Es gilt:

$$U \oplus \operatorname{span}\{u_{r+1}, \ldots, u_n\} = V.$$

Behauptung: $U^\perp = \operatorname{span}\{u_{r+1}, \ldots, u_n\}$. Eigentlich ist nur noch zu erwähnen, dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle u_i,$$

denn dann gilt:

$$v \in \operatorname{span}\{u_{r+1}, \ldots, u_n\} \Leftrightarrow \langle v, u_i \rangle = 0 \text{ für } i \in \{1, \ldots, r\} \Leftrightarrow v \in U^\perp.$$

b) Nach *a)* gilt $U^\perp = \operatorname{span}\{u_{r+1}, \ldots, u_n\}$. D.h.

$$v \in (U^\perp)^\perp \Leftrightarrow v \in \operatorname{span}\{u_{r+1}, \ldots, u_n\}^\perp \Leftrightarrow \langle v, u_i \rangle = 0 \text{ für } i \in \{r+1, \ldots, n\}$$

$$\Leftrightarrow v \in \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_r\} \Leftrightarrow v \in U.$$

c) Es gilt

$$
\begin{aligned}
& x \in (U+W)^\perp \\
\iff & \langle x \rangle \subseteq (U+W)^\perp \\
\iff & \langle x \rangle^\perp \supseteq U+W \qquad\qquad (\cdot^\perp \text{ ist inklusionsumkehrend}) \\
\iff & \langle x \rangle^\perp \supseteq U \wedge \langle x \rangle^\perp \supseteq W \\
\iff & \langle x \rangle \subseteq U^\perp \wedge \langle x \rangle \subseteq W^\perp \\
\iff & \langle x \rangle \subseteq U^\perp \cap W^\perp \\
\iff & x \in U^\perp \cap W^\perp .
\end{aligned}
$$

d) Folgt direkt aus c) mit b).

## 3. Hauptachsentransformation

### Aufgabe 9 Diagonalisierbare Matrix

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 4 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Finde eine Matrix $B \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, sodass $B^T A B$ eine Diagonalmatrix ist.

**Lösung:**

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 4 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Mit Eigenwerten und Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 2, v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_2 = 9, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_3 = 18, v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun normieren wir die Vektoren und schreiben sie in die Spalten der $B$ Matrix.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = B^T \Longrightarrow B^T A B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 10 Definitheit und Eigenwerte

a) Zeige, dass eine positiv semidefinite Matrix nur nichtnegative Eigenwerte besitzt.

b) Folgern Sie aus a), dass für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Matrix $A^T A$ nur nichtnegative Eigenwerte besitzt.

**Lösung:**

a) Ist $\lambda$ ein Eigenwert von $M$ mit Eigenvektor $v$, so gilt:

$$0 \geq v^T M v = v^T \lambda v = \lambda \|v\|^2.$$

Da $v$ ein Eigenvektor von $M$ ist, gilt $v \neq 0$ und damit $\|v\| > 0$. Hieraus folgt $\lambda \geq 0$.

b) Für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$v^T A^T A v = (Av)^T A v = \|Av\|^2 \geq 0.$$

Nach a) besitzt dann $A^T A$ nur nichtnegative Eigenwerte.

**Aufgabe 11 Singulärwertzerlegung explizit**
Bestimme die Singulärwertzerlegung der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Lösung:**

Wir bestimmen Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$:
Die Eigenwerte lauten $\lambda_1 = 18, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 0$ mit Eigenvektoren $v_1 = (0, 0, 1)^T$ und $v_{2,3} = 1/\sqrt{2}(1, \pm 1, 0)^T$. Daraus ergeben sich die Singulärwerte $\sigma_1 = e\sqrt{2}$ und $\sigma_2 = 2$:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $V$ ist gegeben durch die Eigenvektoren:

$$V = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun bestimmen wir noch $U$: Die Spalten von $U$ sind

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist die Singulärwertzerlegung von $A$ gegeben durch $A = U \Sigma V^T$.
Für die zweite Matrix haben wir: $B^T B = 9$, somit den Eigenwert $\lambda = 9$ mit Eigenvektor $v = 1$.
Also ist die Matrix $V = 1$.
Der Singulärwert $\sigma = 3$: $\Sigma = (3\ 0\ 0)^T$.
Nun, um $U$ zu bestimmen berechnen wir erneut die Spalten $u_1 = \frac{1}{\sigma} B v = \frac{1}{3}(2, 2, 1)^T$. Diesen Vektor $u_1$ ergänzen wir zu einer ONB des $\mathbb{R}^3$ durch z.B $u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, -2)^T$ und $u_3 = u_1 \times u_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-5, 4, 2)^T$ und erhalten:

$$U = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 0 & -5 \\ 2\sqrt{5} & 3 & 4 \\ \sqrt{5} & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$