Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Laura Louis, Frederik Schnack

3. Übungsblatt zum Ferienkurs Mathematik für Physiker 1

1. Dualräume

Aufgabe 1: Duale Abbildung

(a) Welches $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ erfüllt

$$f(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = 2, \quad f(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}) = 5, \quad f(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) = -2?$$

(b) Gibt es ein $f \in (\mathbb{R}^2)^*$, welches

$$f(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}) = 1, \quad f(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = 5, \quad f(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}) = 3$$

erfüllt?

Lösung

(a) Der Dualraum $(\mathbb{R}^3)^*$ ist gegeben durch die Menge aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$. Diese Abbildungen können beschrieben werden durch die Menge aller dreidimensionalen Zeilenvektoren. Sei nun $f = (a_1, a_2, a_3)$ $(a_i \in \mathbb{R}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3.$$

Diese lineare Abbildung ist durch die Bilder von 3 linear unabhängigen Vektoren bereits eindeutig bestimmt. Es gilt:

$$f(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = a_1 = 2 \Rightarrow a_1 = 2,$$

$$f(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}) = a_1 + a_2 = 5 \Rightarrow a_2 = 3,$$

$$f(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) = a_1 + a_2 + a_3 = -2 \Rightarrow a_3 = -7.$$

Demnach erfüllt $f = (2, 3, -7) \in (\mathbb{R}^3)^*$ die geforderten Eigenschaften.

(b) Der Dualraum $(\mathbb{R}^2)^*$ ist gegeben durch die Menge aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$. Diese Abbildungen können beschrieben werden durch die Menge aller zweidimensionalen Zeilenvektoren und sind durch die Bilder zweier unabhängiger Vektoren bereits eindeutig bestimmt. Wir prüfen, ob eine durch die beiden ersten Bedingungen festgelegte lineare Abbildung auch die dritte Bedingung erfüllt:

$$f(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}) = f(-1 \cdot \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = -1 \cdot f(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}) + 3 \cdot f(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = -1 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 14 \neq 3.$$

Also gibt es ein solches f nicht.

Aufgabe 2: Dualraum

Sei $V := \mathbb{Q}[x]_{\leq 2} = \{f \in \mathbb{Q}[x] \,|\, deg(f) \leq 2\}$ der Vektorraum aller Polynome in rationalen Koeffizienten vom Grad ≤ 2. Weiter sei $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\} = \{1, x, x^2\}$ eine Basis von $\mathbb{Q}[x]_{\leq 2}$.

(a) Bestimme den Dualraum V^*.

(b) Sei nun $F \in V^*$ mit $F : \mathbb{Q}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{Q}$ definiert über

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mapsto 5 \cdot a_0 + 7 \cdot a_1 - a_2.$$

Bestimme die Darstellungsmatrix von F bezüglich der Basis $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{Q}[x]_{\leq 2}$ und $\mathcal{D} = \{1\} \subseteq \mathbb{Q}$.

Lösung

(a) Der Dualraum ist gegeben durch alle linaren Abbildungen $F : \mathbb{Q}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{Q}$. Eine solche lineare Abbildung ist durch die Wirkung auf den Basisvektoren c_1, c_2, c_3 bereits eindeutig bestimmt. Seien $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{Q}$ mit

$$\begin{aligned} F(c_1) &= F(1) = b_0, \\ F(c_2) &= F(x) = b_1, \\ F(c_3) &= F(x^2) = b_2. \end{aligned}$$

Dann ist F bereits festgelegt über die Vorschrift

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mapsto b_0 a_0 + b_1 a_1 + b_2 a_2.$$

Insgesamt ist der Dualraum V^* demnach gegeben durch die Menge aller Tripel

$$\{(b_0, b_1, b_2) \,|\, b_i \in \mathbb{Q}\}.$$

(b) Für die Darstellungsmatrix bestimmen wir die Bilder von c_1, c_2, c_3 unter der Abbildung F.

$$\begin{aligned} F(1) &= 5, \\ F(x) &= 7, \\ F(x^2) &= -1. \end{aligned}$$

Somit ist die Darstellungsmatrix gegeben durch

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}} = (5, 7, -1) \in \mathbb{R}^{1 \times 3}.$$

2. Darstellungsmatrizen

Aufgabe 3: Darstellungsmatrix 1

Sei $V := \mathbb{R}[X]_{\leq 4}$ der Unterraum aller Polynome vom Grad ≤ 4 und $f : V \to K^2$ die Abbildung

$$P \mapsto (P(1), P'(0)).$$

Hierbei notiert $(\sum_{i=0}^n a_i X^i)' = \sum_{i=1}^n a_i X^{i-1}$ die erste Ableitung.

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung von f bezüglich der Basen $1, X, X^2, X^3, X^4$ von V und e_1, e_2 von K^2 an.

(b) Bestimmen Sie den Rang und den Kern von f.

Lösung

(a) Es gilt:
$$f(X) = (1,1), \quad f(1) = f(X) = f(X^2) = f(X^3) = f(X^4) = (1,0).$$
Demnach ist die Darstellungsmatrix von f bezüglich $A = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ und $B = \{e_1, e_2\}$ gegeben als
$$M_B^A(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt:
$$rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Aus der Dimensionsformel folgt, dass dimker(f) = 5 - rg(f) = 3.

<u>Variante 1:</u>
Durch geschicktes Hinsehen erkennt man, dass die Elemente $1-X^2, 1-X^3, 1-X^4$ im Kern von f liegen. Zudem sind diese offesichtlich linear unabhängig. Damit und der Tatsache, dass dimker(f) = 3 folgt:
$$ker(f) = \{1 - X^2, 1 - X^3, 1 - X^4\}.$$

<u>Variante 2:</u>
Per Definition gilt für $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$:
$P \in ker(f) \Leftrightarrow f(P) = (0,0) = (a + b + c + d + e, (4aX^3 + 3bX^2 + 2cX + d)(0)) = (a + b + c + d + e, d)$. Also $d = 0$ und
$$ker(f) = \{aX^4 + bX^3 + cX^2 - a - b - c \,|\, a, b, c \in K\}.$$

Die Wahl $(a, b, c) = (-1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -1)$ liefert die linear unabhängigen Polynome aus Variante 1. Also
$$ker(f) = \{1 - X^2, 1 - X^3, 1 - X^4\}.$$

Aufgabe 4: Darstellungsmatrix 2

Sei V ein zwei-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $\{a_1, a_2\}$ eine Basis von V. Betrachte folgende Vektoren in V
$$b_1 = a_1, \tag{1}$$
$$b_2 = -\frac{1}{2}a_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}a_2, \tag{2}$$
$$b_3 = -\frac{1}{2}a_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}a_2. \tag{3}$$

(a) Zeige, dass $\{b_1, b_2\}$ eine Basis von V ist. Schreibe b_3 als Linearkombination von b_1 und b_2.

(b) Die linearen Abbildungen $f, g : V \to V$ seien definiert durch

$$\begin{aligned} f(b_1) &= b_2, \quad & f(b_2) &= b_1; \\ g(b_1) &= b_2, \quad & g(b_2) &= b_3. \end{aligned}$$

Bestimme $f(b_3)$ und $g(b_3)$.

(c) Seien A und B die geordneten Basen $A = \{a_1, a_2\}$ und $B = \{b_1, b_2\}$. Berechne die Matrizen

$$\begin{aligned} &M_A^A(f), \quad M_A^A(g), \quad M_A^A(f \circ g), \quad M_A^A(g \circ f), \\ &M_B^B(f), \quad M_B^B(g), \quad M_B^B(f \circ g), \quad M_B^B(g \circ f). \end{aligned}$$

Hinweis: Berechne die Darstellungsmatrizen von $f \circ g$ und $g \circ f$ mithilfe der entsprechenden Darstellungsmatrizen für f und g.

Lösung

(a) Für $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt wegen der linearen Unabhängigkeit von a_1, a_2:

$$0 = \lambda b_1 + \mu b_2 = \left(\lambda - \frac{1}{2}\mu\right) a_1 + \mu a_2 \iff \mu = 0 \wedge \lambda - \frac{1}{2}\mu = 0 \iff \mu = 0 \wedge \lambda = 0$$

Damit folgt wegen $\dim(V) = 2$ sofort, dass $\{b_1, b_2\}$ eine Basis von V ist.

Auflösen der Gleichungen (1) und (2) auf a_1 bzw. a_2 und Einsetzen der entsprechenden Terme in (3) liefert eine Darstellung von b_3 als $b_3 = -b_1 - b_2$.

(b)

$$\begin{aligned} f(b_3) &= f(-b_1 - b_2) = -f(b_1) - f(b_2) = -b_2 - b_1 = b_3 \\ g(b_3) &= -g(b_1) - g(b_2) = -b_2 - b_3 = -b_2 - (-b_1 - b_2) = b_1 \end{aligned}$$

(c) Die Standard-Vorgehensweise liefert:

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_B^B(g) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und

$$M_B^B(f \circ g) = M_B^B(f) \cdot M_B^B(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_B^B(g \circ f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} f(a_1) &= f(b_1) = b_2 = -\frac{1}{2}a_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}a_2 \\ f(a_2) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(f(b_2) - f(b_3)) = \frac{1}{\sqrt{3}}(b_1 - b_3) = \frac{3}{2\sqrt{3}}a_1 + \frac{1}{2}a_2 \end{aligned}$$

und es folgt deshalb

$$M_A^A(f) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Eine etwas andere Art dies zu sehen ist via Basiswechseln und Matrixinversion. Es gilt:

$$M_A^A(f) = (T_B^A)^{-1} \cdot M_B^B(f) \cdot T_B^A$$

wobei T_B^A die Basiswechselmatrix ist, die den Übergang von A nach B beschreibt, also die Basisvektoren von A auf die Basisvektoren von B abbildet. Damit gilt

$$(T_B^A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow T_B^A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

und wie erwartet

$$M_A^A(f) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Analog folgt für g:

$$\begin{aligned} g(a_1) &= g(b_1) = b_2 = -\frac{1}{2}a_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}a_2 \\ g(a_2) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(g(b_2) - g(b_3)) = \frac{1}{\sqrt{3}}(b_3 - b_1) = -\frac{3}{2\sqrt{3}}a_1 - \frac{1}{2}a_2 \end{aligned}$$

bzw.

$$M_A^A(g) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Und $M_A^A(f \circ g)$ kann wieder über das Matrixprodukt berechnet werden:

$$M_A^A(f \circ g) = M_A^A(f) \cdot M_A^A(g) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: Darstellungsmatrix 3

Sei

$$F : \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 2}, p \mapsto 2p + p',$$

wobei p' die Ableitung von p bezeichnet. Weiter seien $B = \{1, t, t^2\}$ und $C = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ gegeben.

(a) Zeige, dass F linear ist und B, C Basen von $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$.

(b) Finde die darstellenden Matrizen

$$M_B^C(F), \quad M_C^B(F), \quad M_B^C(Id).$$

(c) Rechne die Identität

$$M_B^C(F) = M_B^C(Id) M_C^B(F) M_B^C(Id)$$

nach und veranschauliche in einem Diagramm, warum diese für beliebige $F : V \to V$ gilt.

(d) *Zusatzaufgabe*: Warum heißen Basiswechselmatrizen Basiswechselmatrizen? Beschreibe die Wirkung der Basiswechselmatrizen T_B^C und T_C^B.

Lösung

(a) <u>1. Teil:</u> Seien $p, q \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$F(p + \lambda q) = 2 \cdot (p + \lambda q) + p' + \lambda q' = (2p + p') + \lambda(2q + q') = F(p) + \lambda F(q).$$

Also ist F linear.

<u>2. Teil:</u> Wegen der Isomorphie $\mathbb{R}[t]_{\leq n} \widehat{=} \mathbb{R}^{n+1}$ gilt $\dim \mathbb{R}[t]_{\leq 2} = 3$. Es bleibt die lineare Unabhängigkeit der je 3 Basisvektoren zu zeigen.

Basis B

Aus dem Ansatz $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot t + \lambda_3 \cdot t^2$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$) folgt mittels Koeffizientenvergleich sofort $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Basis C

Eine analoge Rechnung (Standardansatz, Ordnen der Monome, Koeffizientenvergleich) liefert die lineare Unabhängigkeit der Elemente von C.

Demnach sind B, C Basen von $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$.

(b) Wir bestimmen die Bilder der Basisvektoren von C in der Basis B:

$F(1) = 2 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2, F(1 + t) = 3 + 2t = 3 \cdot 1 + 2 \cdot t + 0 \cdot t^2, F(1 + t + t^2) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot t + 2 \cdot t^2.$

Somit gilt:

$$M_B^C(F) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Analog berechnen wir die Bilder der Basisvektoren von B in der Basis C:

$F(1) = 2, \quad F(t) = 2t + 1 = -1 \cdot 1 + 2 \cdot (1 + t), \quad F(t^2) = 2t^2 + 2t = -2 \cdot 1 + 2 \cdot (1 + t + t^2).$

Also gilt

$$M_C^B(F) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $M_B^C(Id)$ entspricht der Basiswechselmatrix T_B^C. Es gilt

$$1 = 1, \quad 1 + t = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t, \quad 1 + t + t^2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 1 \cdot t^2$$

und somit

$$M_B^C(Id) = T_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Nachrechnen zeigt:

$$M_B^C(F) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T_B^C M_C^B(F) T_B^C$$

Das Diagramm wird in der Besprechung gezeichnet.

(d) *Zusatzaufgabe:* Im Folgenden bezeichnet die Abbildung $\phi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ die klassische Kooridinatenabbildung bezüglich einer geordneten Basis $A = (a_1, a_2, a_3)$ mit

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \mapsto \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

Basiswechselmatrizen wechseln, wie der Name schon sagt, zwischen Basisvektoren. Die Wirkung von Basiswechselmatrizen lässt sich am besten mittels des Diagramms aus (c) beschreiben.

Starten wir in unserem Diagramm links oben. Die Basisvektoren der Basis $B = (1, t, t^2)$ besitzen folgende zugehörige Koordinatenvektoren:

$$\phi_B^{-1}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_B^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_B^{-1}(t^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1. \end{pmatrix}$$

Die kurze Überlegung

$$1 = 1, \quad t = -1 \cdot 1 + 1 \cdot (1 + t), \quad t^2 = (-1) \cdot (1 + t) + 1 \cdot (1 + t + t^2),$$

liefert die Basiswechselmatrix

$$T_C^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wenden wir nun diese Basiswechselmatrix auf unsere Koordinatenvektoren bzgl. der Basis B an, so erhalten wir die Koordinatenvektoren der entsprechenden Vektoren bzgl. der Basis C. Beispielsweise gilt:

$$T_C^B \phi_B^{-1}(t) = T_C^B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \phi_C^{-1}(t)$$

Das Ganze wollen wir nun noch an einem Nicht-Basis-Vektor des Polynomraums veranschaulichen. Wir wählen willkürlich $p = t^2 - 5 \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$. Der Vektor p besitzt folgende Darstellungen bezüglich der Basen B bzw. C

$$\phi_B^{-1}(p) = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \phi_C^{-1}(p) = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mittels der Basiswechselmatrizen können wir nun zwischen den verschiedenen Basisdarstellungen wechseln. Beispielsweise erhalten wir durch Anwendung von T_B^C auf $\phi_C^{-1}(p)$

$$T_B^C \phi_C^{-1}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \phi_B^{-1}(p).$$

Aufgabe 6: Drehmatrizen
Sei $\theta \in \mathbb{R}$ und $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die durch Drehung um den Winkel θ gegeben ist. Weiter sei $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Bestimme $M_\mathcal{E}^\mathcal{E}(f_\theta)$ sowie Basen $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $M_B^A(f_\theta) = Id_2$.

Lösung
Teil 1:
Bestimmen der Darstellungsmatrix von f_θ bzgl. der kanonischen Basen des $\mathbb{R}^2$.
In den Spalten der Darstellungsmatrix $M_\mathcal{E}^\mathcal{E}(f_\theta)$ stehen die Bilder der Basisvektoren e_1, e_2 bzgl. der Basisvektoren e_1, e_2.

$$M_\mathcal{E}^\mathcal{E}(f_\theta) = (f_\theta(e_1), f_\theta(e_2)) \quad \in \mathbb{R}^2$$

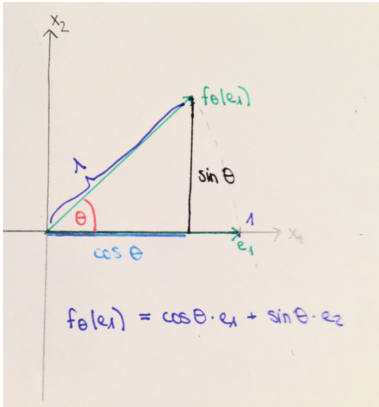


Figure 1: Drehung des Einheitsvektors e1

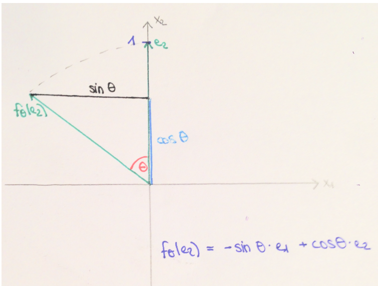


Figure 2: Drehung des Einheitsvektors e2

Geometrische Überlegungen liefern:

$$f_\theta(e_1) = cos(\theta)e_1 + sin(\theta)e_2 = \begin{pmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$f_\theta(e_2) = -sin(\theta)e_1 + cos(\theta)e_2 = \begin{pmatrix} -sin(\theta) \\ cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Somit erhalten wir als Darstellungsmatrix

$$M_\mathcal{E}^\mathcal{E}(f_\theta) = (f_\theta(e_1), f_\theta(e_2)) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Teil 2: Bestimme Basen $A, B \in \mathbb{R}^2$, sodass die zugehörige Darstellungsmatrix die Identität ist.

Wähle $A = \{e_1, e_2\}$.
Es soll gelten:

$$M_B^A(f_\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (f_\theta(e_1), f_\theta(e_2))$$

Also muss $B = \{b_1, b_2\}$ folgendes erfüllen: $f_\theta(e_1) = b_1,\ f_\theta(e_2) = b_2$

Wähle also:

$$b_1 = \begin{pmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \begin{pmatrix} -sin(\theta) \\ cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Die gewählten Basen A,B erfüllen die gewünschte Bedingung.

3. Determinanten

Aufgabe 7: Rechnen mit Determinanten
Ermittle die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 38 & 7 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 7^{44} & 0 \\ \frac{22}{23} & 5 & \sqrt{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ -102 & 8^e & e^8 & 10 \end{pmatrix}, \quad C = A^T B^{-1}.$$

Quelle: Karpfinger Höhere Mathematik in Rezepten (S. 70, Aufgabe 12.9)

Lösung

(a) Es werden folgende Schritte druchgeführt:
1.) Laplace 3. Spalte, 2.) Gauß Typ III, 3.) Laplace 1. Spalte.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 38 & 7 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (20 - 15) = -15.$$

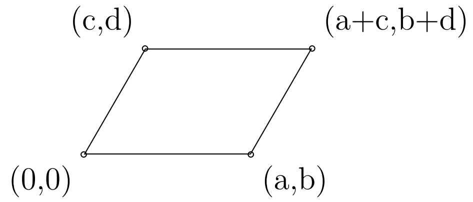
(b) Wir verwenden mehrfach den Determinantenproduktsatz für Blockmatrizen: Die Determinante einer Block-Dreiecksmatrix ist das Produkt der Determinanten der Diagonalblöcke (da hier Diagonalblöcke nur 1×1-Matrix entspricht die Vorgehensweise der Laplace-Entwicklung).

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 7^{44} & 0 \\ \frac{22}{23} & 5 & \sqrt{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ -102 & 8^e & e^8 & 10 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} -3 & 0 & 7^{44} \\ \frac{22}{23} & 5 & \sqrt{\pi} \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 10 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ \frac{22}{23} & 5 \end{vmatrix} = 60 \cdot (-15 - 0) = -900.$$

Aufgabe 8: Geometrische Interpretation Determinante
Zeige, dass für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Determinante $\det(A)$ den Flächeninhalt des Parallelo-

gramms mit den Ecken $(0,0), (a,b), (c,d)$ und $(a+c, b+d)$ berechnet.

Lösung



Aus der gymnasialen Mittelstufe ist bekannt, dass sich der Flächeninhalt eines Parallelogramms mit Eckpunkten A, B, C, D berechnen lässt durch:

$$A = \|\overline{AB} \times \overline{AD}\|.$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Die Vorzeichen werden entsprechend gewählt.

Aufgabe 9: Determinante

Sei K ein Körper und $a, b, c, d \in K$. Zeige, dass für die Matrix A die Determinante $\det(A)$ ein Quadrat in K ist.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

Lösung

Entwicklung nach der ersten Zeile und Berechnung der Determinante der 3×3- Untermatrizen mit der Regel von Sarrus führt auf:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a(a^3 - dbc + dbc + ac^2 + ab^2 + ad^2) \\ &- b(-ba^2 - bd^2 - bc^2 + acd - b^3 - acd) \\ &+ c(-bda + bda + c^3 + cd^2 + cb^2 + ca^2) \\ &- d(-b^2d - a^2d - c^2d - d^3 - cab + cab) \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \end{aligned}$$

4. Diagonalisierbarkeit

Aufgabe 10: Diagonalisierbarkeit

Die folgenden Matrizen leben über $\mathbb{Q}$. Berechne ihre Eigenwerte und Eigenvektoren und entscheide, ob sie diagonalisierbar sind.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Lösung

(a)

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$$

$$\lambda_1 = 2,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -1,\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es ist keine Basis aus Eigenvektoren möglich, demnach ist die Matrix A nicht diagonalisierbar.

(b)

$$\chi_B(\lambda) = \det(\lambda I_3 - B) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$$

$$\lambda_{1,2} = 2,\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = -1,\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es ist eine Basis aus Eigenvektoren vorhanden, demnach ist B diagonalisierbar.

Aufgabe 11: Diagonalisierbarkeit 2

Für welche Werte von $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist die folgende Matrix diagonalisierbar?

$$\begin{pmatrix} 0 & -b & d \\ 1 & -a & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung

$$\chi_A = \det(\lambda I_n - A) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & b & -d \\ -1 & \lambda + a & -c \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \lambda^2(\lambda + a) + \lambda b = \lambda(\lambda^2 + \lambda a + b)$$

Lösungen der quadratischen Gleichung: $\lambda_{1/2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$

Das charakteristische Polynom zerfällt demnach nur falls $a^2 \geq 4b$. Für Diagonalisierbarkeit kommen also nur noch Fälle mit $a^2 \geq 4b$ in Frage:

Fall 1: $a^2 > 4b$

Die drei verschiedenen EW haben jeweils mindestens 1-dim Eigenraum. Somit kann eine Basis auf EV gefunden werden. A ist somit diagonalisierbar.

Fall 2: $a^2 = 4b \neq 0$

$\chi_A = \lambda(\lambda + \frac{a}{2})^2$

$$E_{-\frac{a}{2}} = \ker(A - (-\tfrac{a}{2})I_n) = \ker\left(\begin{pmatrix} \frac{a}{2} & -\frac{a^2}{4} & d \\ 1 & -\frac{a}{2} & c \\ 0 & 0 & \frac{a}{2} \end{pmatrix}\right) = \ker\left(\begin{pmatrix} \frac{a}{2} & -\frac{a^2}{4} & d \\ 0 & 0 & \frac{ac}{2} - d \\ 0 & 0 & \frac{a}{2} \end{pmatrix}\right)$$

Somit gilt: $\dim E_{-\frac{a}{2}} = 1$. Folglich ist A in diesem Fall nicht diagonalisierbar, da geometrische und algebraische Vielfachheit des Eigenwerts $-\frac{a}{2}$ nicht übereinstimmen.

Fall 3: $a^2 = 4b = 0$

$\chi_A = \lambda^3$

$$E_0 = \ker(A) = ker\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & d \\ 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \neq \mathbb{R}^3$$

Der Eigenraum zum einzigen Eigenwert λ müsste den gesamten $\mathbb{R}^3$ erzeugen. Dies ist nicht der Fall und somit ist A in diesem Fall nicht diagonalsierbar.

Aufgabe 12: Nilpotente, unipotente & quasi-nilpotente Matrizen
Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt *nilpotent*, falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $A^n = 0$. Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt *unipotent*, falls $A - I_n$ nilpotent ist und *quasi-nilpotent*, falls eine Potenz A^k für $k > 0$ unipotent ist.

(a) Zeige für eine unipotente Matrix A und eine quasi-unipotente Matrix B gilt: $EW(A) = \{1\}$ und $EW(B) \subseteq \{\lambda \in K | \lambda^k = 1\}$ für ein $k > 0$.

(b) Beweise, dass jede unipotente Matrix zu einer oberen Dreiecksmatrix ähnlich ist.

Lösung

(a) *Bemerkung:* Für ein nilpotentes A mit $A^n = 0$ (für ein $n \in \mathbb{N}$) ist 0 der einzige Eigenwert, denn es gilt: Ist λ ein Eigenwert von A mit Eigenvektor v, dann gilt $0 = A^n v = \lambda^n v \Rightarrow \lambda = 0$. Desweiteren ist A nicht invertierbar und somit ist 0 ein Eigenwert.

   (i) Sei also A unipotent, dann ist $A - I_n$ nilpotent. D.h. 0 ist der einzige Eigenwert von $A - I_n$ und somit ist 1 der einzige Eingenwert von A. ($EW(A - I_n) \leftrightarrow EW(A)$ mit shift)

   (ii) Sei B quasi-unipotent, dann ist B^k unipotent. Sei λ ein Eigenwert von B, dann ist λ^k ein Eigenwert von B^k. Das heißt es ist $\lambda^k = 1$ und wir sind fertig.

(b) Sei $A \in K^{n\times n}$ unipotent. Wir betrachten zunächst A über einem algebraischen Abschluss $\overline{K}$ von K. Jetzt gilt nach (a), dass 1 der einzige Eigenwert von A ist und daher

$$\chi_A = (x-1)^n.$$

Also zerfällt χ_A auch über K in Linearfaktoren und somit ist A ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix.