Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Laura Louis, Frederik Schnack

2. Übungsblatt zum Ferienkurs Mathematik für Physiker 1

1. Linearkombinationen und Basen

Aufgabe 1 Lineare Unabhängigkeit

Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ sind linear abhängig?

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 2 Basen von Unterräumen

Bestimme Basen der Unterräume $U, W + W', W \cap W' \subset \mathbb{Q}^4$ für

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle, \quad W' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle u_1, u_2 \rangle.$$

Hinweis: $W + W' = \{w + w' \mid w \in W, w' \in W'\}$.

Aufgabe 3 Basen von Matrixräumen

Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$. Gebe für jeden der folgenden K-Vektorräume eine Basis an und zeige, dass diese tatsächlich eine Basis ist.

a) $V_1 = \{m \times n$ - Matrizen über K$\}$.

b) $V_2 = \{n \times n$ - Diagonalmatrizen über K$\}$.

c) $V_2 = \{$symmetrischen $n \times n$ - Matrizen über K$\}$.

Aufgabe 4 ($\star$) Lineare Unabhängigkeit und Basen von Abbildungsräumen

Sei M eine nichtleere Menge. Man betrachte nun den K-Vektorraum $V := \text{Abb}(M, K)$ und für alle $x \in M$ die charakteristische Funktion $\chi_x : M \to K$ gegeben via

$$\chi_x(y) = \begin{cases} 0, \text{falls } y \neq x, \\ 1, \text{falls } y = x. \end{cases}$$

Zeige:

a) Für n paarweise verschiedene $x_1, ..., x_n \in M$ sind $\chi_{x_1}, ..., \chi_{x_n} \in V$ linear unabhängig.

b) Falls $M = \{x_1, ..., x_n\}$, dann bilden die $\chi_{x_1}, ..., \chi_{x_n}$ eine Basis von V.

c) Falls M nicht endlich ist, bildet die Menge $\{\chi_x \mid x \in M\}$ kein Erzeugendensystem von V.

Aufgabe 5 Dimension von Erzeugnissen
Sei $t \in \mathbb{R}$ und $U_t = \langle (0,1,1)^T, (4,1,0)^T, (1,t,t^2)^T \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$. Berechne $\dim(U_t)$.

Aufgabe 6 ($\star$) Bedingungen an Lineare Unabhängigkeit
Beweise folgende Aussagen:
a) Für einen Körper K sind zwei Vektoren $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, \ldots, b_n) \in K^n$ genau dann linear unabhängig, wenn ein Paar $i \neq j$ existiert mit $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$.
b) Sei $v_1, \ldots, v_n \in V$ eine Basis eines K-Vektorraumes V. Für $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in K$ definiere

$$w_1 := a_{11}v_1 + a_{12}v_2, \quad w_2 := a_{21}v_1 + a_{22}v_2.$$

Zeige: es ist $w_1, w_2, v_3, \ldots, v_n$ genau dann eine Basis von V, wenn $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.
Hinweis: Kontraposition ist hilfreich.

2. Lineare Abbildungen

Aufgabe 7 Linear?!
Entscheide mit Begründung, ob die folgenden Abbildungen linear sind.

a) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$,

b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto xy$,

c) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2x, y - x)$,

d) $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, v \mapsto -v$,

e) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, v \mapsto v + (0, 1, 0)$,

f) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x, y)$.

Aufgabe 8 Bedingungen an Linearität
Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{R}$. Sei $f : V \to W$ eine Abbildung. Zeige:

(a) Die Abbildung f ist genau dann linear, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $f(av_1 + (1-a)v_2) = af(v_1) + (1-a)f(v_2)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $v_1, v_2 \in V$,
(ii) $f(0) = 0$.

(b) Erfüllt f die Bedingung (i) aus Teil (a) und ist $w \in W$, dann erfüllt auch die Abbildung $g : V \to W$ gegeben durch $v \mapsto f(v) + w$ die Bedingung (i).

(c) Erfüllt f die Bedingung (i) aus Teil (a), dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $g : V \to W$ und ein eindeutig bestimmtes Element $\widetilde{w}$ mit $f(v) = g(v) + \widetilde{w}$ für alle $v \in V$.

Aufgabe 9 Linearität über Matrizen
Sei $M = M_n(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der $n \times n$-Matrizen. Betrachte:

$$Q : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}), A \mapsto A - A^T$$

a) Zeige, dass Q linear ist.

b) Beschreibe $\ker Q$ und bestimme $\dim \ker Q$.

c) Beschreibe $\mathrm{im} Q$.

Aufgabe 10 Kern und Bild von linearen Abbildungen
Sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Man beweise:

(a) Für jeden Unterraum $U \subset V$ gilt $f^{-1}(f(U)) = U + \ker f$.

(b) Für jeden Unterraum $U' \subset W$ gilt $f(f^{-1}(U')) = U' \cap \mathrm{im}\, f$.

(c) Die Abbildung

$$\{U \subseteq V \mid U \text{ ist UVR mit } \ker f \subseteq U\} \to \{U' \subseteq W \mid U' \text{ ist UVR mit } U' \subseteq \mathrm{im}\, f\},\ U \mapsto f(U)$$

ist eine wohldefinierte Bijektion mit inverser Abbildung $U' \mapsto f^{-1}(U')$.

Aufgabe 11 Rang und Inverse Berechnen
Bestimmen Sie den Rang von A und B und, wenn möglich, die Inversen A^{-1}, B^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12 Schlangenlemma
Sei K Körper, V_1, V_2, V_3, V_4 endl. dimensionale Vektorräume mit linearen Abbildungen $f_1 : V_1 \to V_2, f_2 : V_2 \to V_3, f_3 : V_3 \to V_4, f_4 : V_4 \to V_1$. Es gelte $\mathrm{im} f_1 = \ker f_2, \mathrm{im} f_2 = \ker f_3, \mathrm{im} f_3 = \ker f_4, \mathrm{im} f_4 = \ker f_1$. Zeige, dass

$$\dim(V_1) - \dim(V_2) + \dim(V_3) - \dim(V_4) = 0.$$

Aufgabe 13 Nilpotente lineare Abbildung
Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Sei $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung mit $f^r = 0$ für ein $r \in \mathbb{N}$. Zeige $\mathrm{id}_V - f$ ist ein Isomorphismus.

Aufgabe 14 Spur einer Matrix
Sei K ein Körper und $tr : M_n(K) \to K$ definiert als $tr((a_{ij})) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Für eine Matrix A heißt $tr(A)$ die Spur von A. Beweise:

a) Die Abbildung $tr : M_n(K) \to K$ ist linear.

b) Seien $A, B, C \in M_n(K)$, dann gilt $tr(AB) = tr(BA)$ und $tr(ABC) = tr(CAB) = tr(BCA)$.

c) Finde Matrizen A, B, C mit $tr(ABC) \neq tr(ACB)$.