1. Übungsblatt zum Ferienkurs Mathematik für Physiker 1

1. Matrizen und Vektoren

Aufgabe 1: Zeilenstufenform

(a) Bringe folgende Matrizen in $M_3(\mathbb{Q})$ auf Zeilenstufenform.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 7 & 2 & 4 \\ 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 3 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimme den Rang der Matrizen A, B und C.
(c) Ist das zu der Matrix $M = A, B, C$ zugehörige homogene GLS $Mx = 0$ eindeutig lösbar?

Lösung

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[III-7\cdot I]{II-4\cdot I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[III\cdot\frac{1}{-6}]{II\cdot\frac{1}{-3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[I-2\cdot II]{III-II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 7 & 2 & 4 \\ 8 & 9 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[II-7\cdot I]{III-8\cdot I} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 0 & -40 & -31 \\ 0 & -39 & -37 \end{pmatrix} \xrightarrow{II\cdot\frac{1}{-40}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 0.775 \\ 0 & -39 & -37 \end{pmatrix} \xrightarrow{III+39\cdot II} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 0.775 \\ 0 & 0 & -6.775 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 3 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[II-4\cdot I]{III-5\cdot I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & -5 & -28 \\ 0 & -4 & -38 \end{pmatrix} \xrightarrow{II\cdot\frac{1}{-5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 5.6 \\ 0 & -4 & -38 \end{pmatrix} \xrightarrow{III+4\cdot II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 5.6 \\ 0 & 0 & -15.6 \end{pmatrix}$$

(b) Der Rang wurde in der Vorlesung definiert als die Anzahl der Nicht-Nullzeilen einer Matrix in Zeilenstufenform. Unter Verwendung von (a) gilt somit: $rg(A) = 2$, $rg(B) = 3$, $rg(C) = 3$.

(c) Aus der Vorlesung ist bekannt: Ein homogenes Gleichungssystem der Form $Mx = 0$ mit n Unbekannten ist eindeutig lösbar genau dann wenn $rg(M) = n$. Hier liegt jeweils ein Gleichunssystem mit $n = 3$ Unbekannten vor. Mit (b) erhalten wir, dass die zu B und C gehörigen homogenen GLS eindeutig lösbar sind, während dies für A nicht der Fall ist.

Aufgabe 2: Matrix invertieren

Sind die Matrizen A und B invertierbar? Falls ja, bestimme die Inverse und prüfe dein Ergebnis anschließend mittels der Matrixmultiplikation $A^{-1}A = I_3$.

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \qquad (b)\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung
Wir prüfen die Invertierbarkeit durch Berechnung der Determinante.
(a) Unter Verwendung der Sarrus-Regel erhalten wir

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 3 \cdot (-3) + 1 \cdot (-2) \cdot 6 - (-3) \cdot 1 \cdot 6 - 1 \cdot 2 \cdot (-5) - 3 \cdot (-2) \cdot 3 = 1$$

Also gilt $\det(A) \neq 0$ und somit ist A invertierbar.

Um die inverse Matrix zu bestimmen, stellen wir die erweiterte Matrix auf und formen diese mittels Gauß-Algorithmus geeignet um:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Also ist die Inverse von A gegeben durch

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir prüfen unser Ergebnis mittels der Matrixmultiplikation $A^{-1}A = AA^{-1} = I_3$. Passt!

(b) Wir verwenden erneut die Sarrus-Regel und erhalten

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 48 + 5 + 30 - 60 - 8 - 15 = 0.$$

Also $\det(B) = 0$ und somit ist B nicht invertierbar.

2. Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 3: Metall-Legierungen

Es seien Metall-Legierungen M_1, M_2, M_3 gegeben, die alle Kupfer, Silber und Gold enthalten, und zwar in folgenden Prozentsätzen:

	Kupfer	Silber	Gold
M_1	20	60	20
M_2	70	10	20
M_3	50	50	0

.

Kann man diese Legierungen so mischen, dass eine Legierung entsteht, die 40% Kupfer, 50% Silber und 10% Gold enthält?

Lösung
Die beschriebene Situation lässt sich als folgendes inhomogenes GLS auffassen:

$$\begin{pmatrix} 20 & 70 & 50 \\ 60 & 10 & 50 \\ 20 & 20 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen die Lösungsmenge der skalierten erweiterten Matrix durch geeigente Gauß-Umformungen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 4 \\ 0 & -20 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{array}\right)$$

Demnach kann man die Legierungen passend mischen. Die Lösungsmenge ist gegeben durch alle Vielfachen des Lösungsvektors

$$\begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.1 \\ 0.5 \end{pmatrix},$$

welcher das Mischverhältnis der Legierungen beschreibt. Also

$$\mathcal{L} = \langle \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.1 \\ 0.5 \end{pmatrix} \rangle.$$

Aufgabe 4: Inhomogenes GLS

Bestimme die Lösungsmenge des folgenden inhomogenen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} -6x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2, \\ -9x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 3, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1, \\ -15x_1 + 14x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 5. \end{aligned}$$

Lösung

Wir schreiben das inhomogene Gleichungssystem als erweiterte Matrix und lösen es durch geeignete Gauß-Umformungen.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 6 & 2 & -2 & 2 \\ -9 & 8 & 3 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -15 & 14 & 5 & -4 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist unterbestimmt, somit können wir zwei Variablen frei wählen. Wähle $x_4 = a$ und $x_3 = b$. Aus II folgt $x_2 = a$ und aus I folgt $x_1 = \frac{1-2a-b}{-3}$. Die Lösungsmenge ist somit gegeben durch

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1-2a-b}{-3} \\ a \\ b \\ a \end{pmatrix} \middle| \; a, b \text{ beliebig} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot a + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot b \; \middle| \; a, b \text{ beliebig} \right\}.$$

Aufgabe 5 (*): Eindeutige Lösbarkeit

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeige, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + ay + bz &= 0, \\ bx + y + az &= 0, \\ ax + by + z &= 0, \end{aligned}$$

genau dann eine von $(0,0,0)$ verschiedene Lösung besitzt, wenn $a = b = 1$ oder $a + b + 1 = 0$ gilt. Bestimme in beiden Fällen die Lösungsmenge.

Lösung

Rückrichtung: Falls $a = b = 1$, dann bleibt in der Stufenform die Gleichung $x + y + z = 0$ übrig. Also ist der Lösungsraum

$$\left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Insbesondere besitzt das GLS eine von $(0,0,0)$ verschiedene Lösung.

Falls $a + b + 1 = 0$, dann lautet die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1-a \\ -1-a & 1 & a \\ a & -1-a & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir bringen die Matrix in Zeilenstufenform. Ein Zwischenschritt lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1-a \\ 0 & -1-a-a^2 & 1+a+a^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da aber

$$a^2 + a + 1 = a^2 + a + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0,$$

können wir weiter auf

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vereinfachen.

Der Lösungsraum ist

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Also besitzt auch in diesem Fall das GLS eine von (0,0,0) verschiedene Lösung.

Hinrichtung:

Kontraposition. Seien a, b nicht gleichzeitig 1. Sei zudem $a+b+1 \neq 0$. Wir addieren zur ersten Zeile die beiden anderen Zeilen und dividieren anschließend durch $a + b + 1 \neq 0$. Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & a \\ a & b & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir ziehen das a-fache der ersten Zeile von der dritten ab und das b-fache der ersten Zeile von der zweiten ab. Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-b & a-b \\ 0 & b-a & 1-a \end{pmatrix}.$$

Der Rang dieser Matrix ist genau dann voll, wenn der Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1-b & a-b \\ b-a & 1-a \end{pmatrix}$$

voll ist. Wir setzen $s = 1-a$ und $t = 1-b$. Jetzt ist s oder t ungleich 0. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} t & t-s \\ s-t & s \end{pmatrix}.$$

Falls $t = 0$: Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 0 & -s \\ s & s \end{pmatrix}.$$

Da $s \neq 0$ hat diese Matrix vollen Rang.

Falls $t \neq 0$: Wir multiplizieren die zweite Zeile mit t:

$$\begin{pmatrix} t & t-s \\ (s-t)t & st \end{pmatrix},$$

und ziehen dann das $(s-t)$-fache der ersten Zeile von der zweiten ab:

$$\begin{pmatrix} t & t-s \\ 0 & st-(s-t)(t-s) \end{pmatrix}$$

Der Rang dieser Matrix ist voll, da

$$st-(s-t)(t-s) = s^2 - st + t^2 = \left(s - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}t^2 > 0.$$

Aufgabe 6: Schnitte von Ebenen

Im $\mathbb{R}^3$ seien drei affine Ebenen E_1, E_2, E_3 gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} E_1 : x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ E_2 : x_1 - 2x_2 &= 3, \\ E_3 : 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Bestimme alle paarweisen Schnitte der Ebenen. Was ist $E_1 \cap E_2 \cap E_3$? Fertige eine Skizze an.

Lösung

$E_1 \cap E_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{II-I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ -3x_2 - x_3 = 2. \end{array}$$

Wähle x_2 als freie Variable.

$$\begin{aligned} &x_3 = -3x_2 - 2, \\ &x_1 = 1 - x_2 - x_3 = 1 - x_2 + 3x_2 + 2 = 2x_2 + 3. \end{aligned}$$

Wir erhalten die Gerade a als Lösung:

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$E_1 \cap E_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{II-3\cdot I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -2 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ -6x_2 - 2x_3 = 1. \end{array}$$

Wähle x_2 als freie Variable.

$$\begin{aligned} x_3 &= -3x_2 - \frac{1}{2}, \\ x_1 &= 1 - x_2 - x_3 = 1 - x_2 + 3x_2 + \frac{1}{2} = 2x_2 + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Wir erhalten die Gerade b als Lösung:

$$b = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$E_2 \cap E_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{II-3\cdot I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 = 3, \\ 3x_2 + x_3 = -5. \end{array}$$

Wähle x_2 als freie Variable.

$$\begin{aligned} x_3 &= -3x_2 - 5, \\ x_1 &= 2x_2 + 3. \end{aligned}$$

Wir erhalten die Gerade c als Lösung:

$$c = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$E_1 \cap E_2 \cap E_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[III-3\cdot I]{II-I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{III-2\cdot II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -3x_2 - x_3 = 2 \\ 0 = -3 \end{array}$$

Widerspruch! Das Gleichungssystem ist überbestimmt! Somit existiert keine Lösung.
Folglich: $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \varnothing$.

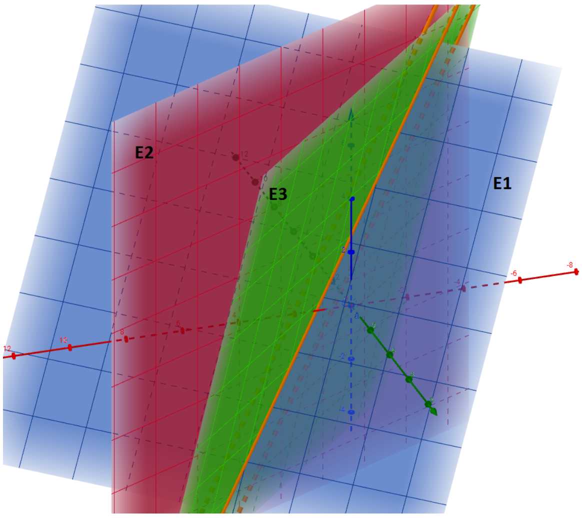

Figure 1: Frontansicht der drei Ebenen.

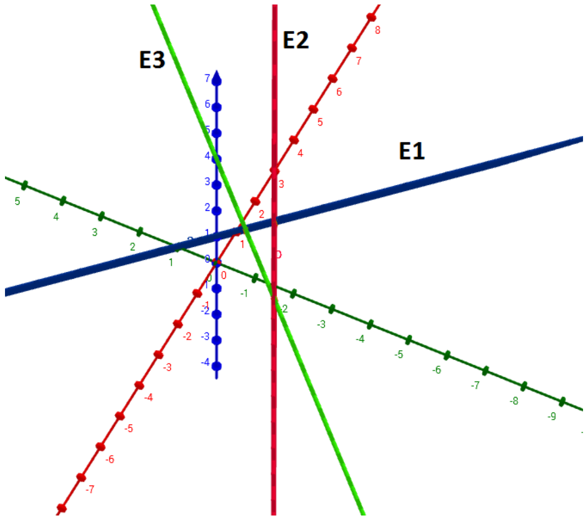

Figure 2: Querschnitt in Richtung des Vektors $v = (2, 1, -3)^T$.

3. Gruppen

Aufgabe 7: Sudokuregel

Sei $G = \{e, a, b\}$ eine Menge. Zeige, dass genau eine Verknüpfung $* : G \times G \to G$ existiert, mit der G zu einer dreielementigen Gruppe mit neutralem Element e wird.

Lösung

Allgemeine Beobachtung: In jeder Spalte und Zeile einer Gruppentafel kommt jedes Element genau einmal vor. („Sudokuregel“)
Um das zu sehen seinen $a, b, c \in \tilde{G}$ (mit $\tilde{G}$ beliebige Gruppe) gegeben, für die gilt: $a * c = b * c$

$$\Rightarrow \quad e = (a * c)(b * c)^{-1} = a * b^{-1} \Rightarrow \quad a = b.$$

Dies zeigt die Behauptung für Spalten, für Zeilen mit $c * a = c * b$ einfach analog.
Mit der Annahme, dass e das neutrale Element ist, folgt sofort:

$\odot$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	?	?
b	b	?	?

und Anwendung der Beobachtung liefert:

$\odot$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Dies zeigt die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung nach Konstruktion. Also existiert genau eine Verknüpfung $*$ mit der G zu einer Gruppe wird.

Aufgabe 8: Rechnen in Gruppen

Sei G eine Gruppe mit neutralem Element e.
(a) Es gelte $(ab)^2 = a^2b^2$ für alle $a, b \in G$. Zeige, dass G abelsch ist.
(b) Es gelte $a^2 = e$ für alle $a \in G$. Zeige, dass G abelsch ist.

Lösung

(a) Seien $a, b \in G$.

$$\begin{aligned} (ab)^2 = a^2b^2 \quad &\Leftrightarrow \quad abab = aabb \quad \Leftrightarrow \quad a^{-1}(abab)b^{-1} = a^{-1}(aabb)b^{-1} \\ \Leftrightarrow \quad (a^{-1}a)ba(bb^{-1}) &= (a^{-1}a)ab(bb^{-1}) \quad \Leftrightarrow \quad ba = ab \quad \forall a, b \in G \end{aligned}$$

Also ist G abelsch.

(b) 1. Lösungsweg

$$(ab)^2 = e = ee = a^2b^2$$

Dann folgt mit (a), dass G abelsch ist.

2. Lösungsweg

$$ab = a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1} = ba \quad \forall a, b \in G$$

Also ist G abelsch.

Aufgabe 9: Schnitte von Untergruppen
Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $H_1, H_2 \subseteq G$ Untergruppen von G. Zeige, dass $H_1 \cap H_2$ ebenfalls eine Untergruppe von G ist.

Lösung
Wir prüfen die drei Untergruppenkriterien für $H_1 \cap H_2 \subseteq G$:

(UG1) $H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$, denn z.B. $e \in H_1$ und $e \in H_2$, also $e \in H_1 \cap H_2$.

Seien nun $x, y \in H_1 \cap H_2$.

(UG2) Dann gilt insbesondere $x, y \in H_1$ und $x, y \in H_2$. Da H_1 und H_2 Untergruppen gilt damit $x * y \in H_1$ und $x * y \in H_2$. Insgesamt also $x * y \in H_1 \cap H_2$.

(UG3) Es gilt erneut $x \in H_1$ und $x \in H_2$. Da H_1 und H_2 Untergruppen gilt damit auch $x^{-1} \in H_1$ und $x^{-1} \in H_2$. Insgesamt gilt also $x^{-1} \in H_1 \cap H_2$.

Demnach ist $H_1 \cap H_2$ eine Untergruppe.

Aufgabe 10: Rechnen mit Permutationen
Berechne $\sigma\tau, \tau\sigma, \sigma^{-1}$ und τ^{-1} für folgende Permutationen $\sigma, \tau \in S_5$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Stelle die Ergebnisse sowohl in Tupel- als auch Zykelschreibweise dar.

Lösung

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1, 4, 5), \quad \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1, 5, 2),$$

$$\sigma^{-1} = \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1, 5)(2, 4), \quad \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (1, 4, 2).$$

4. Vektorräume

Aufgabe 11: Unterräume
Welche der folgenden Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$ bilden Unterräume?
(a) Die Menge $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$,

(b) Die Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 = y^2\} \subset \mathbb{R}^2$,
(c) Die Menge $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 4x + 5y\} \subset \mathbb{R}^3$.

Lösung

(a) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$ bildet einen Unterraum des $\mathbb{R}^3$. Beweis:
1) $M \neq \varnothing$, da z.B. $(0,0,0) \in$ M
2) Abgeschlossenheit unter Addition:
Seien $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in M$. Dann gilt:
$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \quad \in M$, da

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) = 0 + 0 = 0$$

3) Abgeschlossenheit unter skalarer Multiplikation:
Sei $(x,y,z) \in M, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
$\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in M$, da

$$\lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda(x + y + z) = 0$$

(b) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 = y^2\}$ bildet keinen Unterraum des $\mathbb{R}^2$.
M ist nicht additiv abgeschlossen.
Wähle z.B. $(1,1), (1,-1) \in M$. Dann gilt:

$$(1,1) + (1,-1) = (2,0) \notin M, \text{ da } 4 \neq 0.$$

(c) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 4x + 5y\}$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$. Beweis:
1) $M \neq \varnothing$, da z.B. $(0,0,0) \in$ M
2) Abgeschlossenheit unter Addition:
Seien $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in M$. Dann gilt:
$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \quad \in M$, da

$$4(x_1 + x_2) + 5(y_1 + y_2) = 4x_1 + 5y_1 + 4x_2 + 5y_2 = z_1 + z_2$$

3) Abgeschlossenheit unter skalarer Multiplikation:
Sei $(x,y,z) \in M, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
$\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in M$, da

$$\lambda z = \lambda(4x + 5y) = (4\lambda x + 5\lambda y)$$

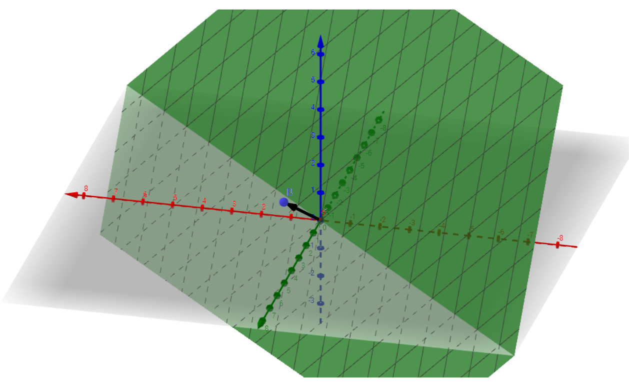

Figure 3: Darstellung der Menge (a)

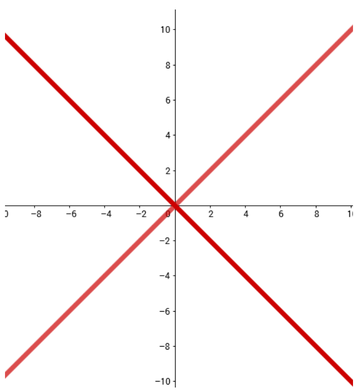

Figure 4: Darstellung der Menge (b)

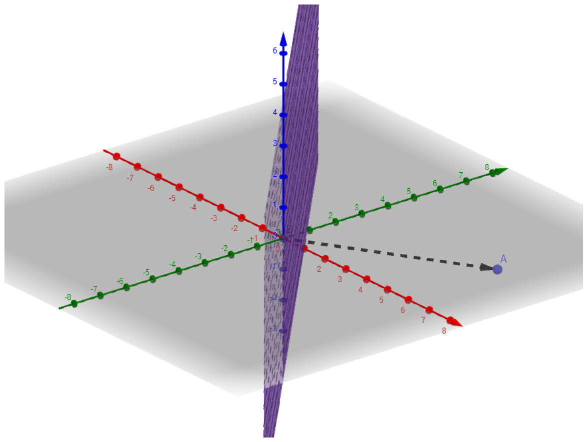

Figure 5: Darstellung der Menge (c)

Aufgabe 12: Kurze Vektorraum-Beweise
Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $U \subset V$ ein Unterraum. Beweise folgende Aussagen:
(a) Sei $v \in V$. Dann ist $v + U := \{v + w | w \in U\}$ ein Unterraum genau dann, wenn $v \in U$.
(b) Der Lösungsraum eines inhomogenen linearen Gleichungssystems in K^n ist kein Unterraum.
(c) Für Unterräume $U_1, U_2 \subseteq V$ ist $U_1 \cup U_2$ Unterraum genau dann, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

Lösung

(a) " $\implies$ " Sei $v + U$ Unterraum für ein $v \in V$. Dann ist $0 \in v + U$ also existiert ein $w \in U$ mit $0 = v + w$. Daraus folgt $w = -v \in U$ und somit $v \in U$.
" $\impliedby$ " Sei $v \in U$. Zu zeigen ist, dass $v + U$ wieder einen Unterraum bildet. Seien dafür $v + w, v + u \in v + U$ und $\lambda \in K$ gegeben.

(UG1) $v + U \neq \varnothing$, da z.B. $v \in v + U$.

(UG2) $(v + w) + (v + u) = v + (w + v + u) \in v + U$ da $w + v + u \in U$.

(UG3) $\lambda(v + u) = v + (1 - \lambda)v + \lambda u \in v + U$ da $(1 - \lambda)v + \lambda u \in U$.

(b) Die Lösungsmenge eines inhomogenen Gleichungssystems enthält den Nullvektor nicht. Damit kann sie kein Unterraum sein.

(c) " $\impliedby$ " Für $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ ist die Aussage trivialerweise wahr.
" $\implies$ " Beweis durch Kontraposition: Angenommen es gilt weder $U_1 \subseteq U_2$ noch $U_2 \subseteq U_1$. Wähle $u_1 \in U_1 \backslash U_2$ und $u_2 \in U_2 \backslash U_1$ (was nach Annahme möglich ist). Wäre nun $u_1 + u_2 \in U_1$ so wäre auch $u_2 = u_1 + u_2 - u_1 \in U_1$ was ein Widerspruch zur Wahl ist. Analog kann nicht $u_1 + u_2 \in U_2$ gelten, also ist $u_1 + u_2 \notin U_1 \cup U_2$ und damit $U_1 \cup U_2$ nicht abgeschlossen unter Vektoraddition. Das zeigt, dass $U_1 \cup U_2$ kein Unterraum sein kann.

Aufgabe 13: Kurze Vektorraum-Beweise 2
Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $f, g : V \to V$ zwei lineare Abbildungen mit $f + g = id_V$. Beweise folgende Aussagen:
(a) Es gilt $V = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$,
(b) Falls weiterhin gilt $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$, dann gilt auch

$$f \circ f = f, \quad g \circ g = g, \quad f \circ g = g \circ f = 0.$$

Lösung
(a) " $\supseteq$ " :

Wegen $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{V}$ und $\mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{V}$ folgt $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in \mathrm{Im}(f), v_2 \in \mathrm{Im}(g)\} \subseteq V$.

" $\subseteq$ " :
Sei $v \in V$ beliebig. Definiere $v_1 := f(v) \in \mathrm{Im}(f)$ und $v_2 := g(v) \in \mathrm{Im(g)}$. Dann gilt
$v = id_V(v) = (f+g)(v) = f(v) + g(v) = v_1 + v_2 \subseteq \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.

(b) Sei nun $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$ und $v \in V$. Wir zeigen zunächst $f \circ g = g \circ f = 0$. Es gilt:

$$f(g(v)) = (id - g)(v - f(v)) = v - f(v) - g(v) + g(f(v)) = v - v + g(f(v)) = g(f(v)).$$

Wegen $f(g(v)) \in \mathrm{Im}(f)$ und $g(f(v)) \in \mathrm{Im}(g)$ und $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$ folgt: $f(g(v)) = g(f(v)) = 0$. Also $f \circ g = g \circ f = 0$.
Daraus folgt: $f \circ f = (id - g) \circ f = f - g \circ f = f$. Analog $g \circ g = g$.

Aufgabe 14: Erzeugnis
Betrachte $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum und bestimme $\langle \mathbb{N} \rangle \subset \mathbb{R}$.

Lösung
Behauptung: $\langle \mathbb{N} \rangle = \mathbb{Q}$.
" $\subseteq$ " : Sei $v \in \langle \mathbb{N} \rangle$ dann ist $v = \sum_{k=1}^{n} a_i v_i$ mit $a_i \in \mathbb{Q}$ und $v_i \in \mathbb{N}$. Also $v \in \mathbb{Q}$.

oder: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Untervektorraum mit $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$. Also gilt $\langle \mathbb{N} \rangle \subseteq \mathbb{Q}$.

" $\supseteq$ " : Sei $v \in \mathbb{Q}$, da $1 \in \mathbb{N}$ gilt $v = v \cdot 1 \in \langle \mathbb{N} \rangle$.