1. Übungsblatt zum Ferienkurs Mathematik für Physiker 1

1. Matrizen und Vektoren

Aufgabe 1: Zeilenstufenform

(a) Bringe folgende Matrizen in $M_3(\mathbb{Q})$ auf Zeilenstufenform.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 7 & 2 & 4 \\ 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 3 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimme den Rang der Matrizen A, B und C.
(c) Ist das zu der Matrix $M = A, B, C$ zugehörige homogene GLS $Mx = 0$ eindeutig lösbar?

Aufgabe 2: Matrix invertieren

Sind die Matrizen A und B invertierbar? Falls ja, bestimme die Inverse und prüfe dein Ergebnis anschließend mittels der Matrixmultiplikation $A^{-1}A = I_3$.

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \qquad (b)\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 3: Metall-Legierungen

Es seien Metall-Legierungen M_1, M_2, M_3 gegeben, die alle Kupfer, Silber und Gold enthalten, und zwar in folgenden Prozentsätzen:

	Kupfer	Silber	Gold
M_1	20	60	20
M_2	70	10	20
M_3	50	50	0

Kann man diese Legierungen so mischen, dass eine Legierung entsteht, die 40% Kupfer, 50% Silber und 10% Gold enthält?

Aufgabe 4: Inhomogenes GLS

Bestimme die Lösungsmenge des folgenden inhomogenen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} -6x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2, \\ -9x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 3, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1, \\ -15x_1 + 14x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 5. \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (*): Eindeutige Lösbarkeit
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeige, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + ay + bz &= 0, \\ bx + y + az &= 0, \\ ax + by + z &= 0, \end{aligned}$$

genau dann eine von $(0,0,0)$ verschiedene Lösung besitzt, wenn $a = b = 1$ oder $a + b + 1 = 0$ gilt. Bestimme in beiden Fällen die Lösungsmenge.
Hinweis: Für die Rückrichtung empfiehlt sich ein Beweis mittels Kontraposition.

Aufgabe 6: Schnitte von Ebenen
Im $\mathbb{R}^3$ seien drei affine Ebenen E_1, E_2, E_3 gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} E_1 : x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ E_2 : x_1 - 2x_2 &= 3, \\ E_3 : 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Bestimme alle paarweisen Schnitte der Ebenen. Was ist $E_1 \cap E_2 \cap E_3$? Fertige eine Skizze an.

3. Gruppen

Aufgabe 7: Sudokuregel
Sei $G = \{e, a, b\}$ eine Menge. Zeige, dass genau eine Verknüpfung $* : G \times G \to G$ existiert, mit der G zu einer dreielementigen Gruppe mit neutralem Element e wird.

Aufgabe 8: Rechnen in Gruppen
Sei G eine Gruppe mit neutralem Element e.
(a) Es gelte $(ab)^2 = a^2b^2$ für alle $a, b \in G$. Zeige, dass G abelsch ist.
(b) Es gelte $a^2 = e$ für alle $a \in G$. Zeige, dass G abelsch ist.

Aufgabe 9: Schnitte von Untergruppen
Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $H_1, H_2 \subseteq G$ Untergruppen von G. Zeige, dass $H_1 \cap H_2$ ebenfalls eine Untergruppe von G ist.

Aufgabe 10: Rechnen mit Permutationen
Berechne $\sigma\tau, \tau\sigma, \sigma^{-1}$ und τ^{-1} für folgende Permutationen $\sigma, \tau \in S_5$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Stelle die Ergebnisse sowohl in Tupel- als auch Zykelschreibweise dar.

4. Vektorräume

Aufgabe 11: Unterräume

Welche der folgenden Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$ bilden Unterräume?
(a) Die Menge $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$,
(b) Die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 = y^2\} \subset \mathbb{R}^2$,
(c) Die Menge $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 4x + 5y\} \subset \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 12: Kurze Vektorraum-Beweise

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $U \subset V$ ein Unterraum. Beweise folgende Aussagen:
(a) Sei $v \in V$. Dann ist $v + U := \{v + w | w \in U\}$ ein Unterraum genau dann, wenn $v \in U$.
(b) Der Lösungsraum eines inhomogenen linearen Gleichungssystems in K^n ist kein Unterraum.
(c) Für Unterräume $U_1, U_2 \subseteq V$ ist $U_1 \cup U_2$ Unterraum genau dann, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

Aufgabe 13: Kurze Vektorraum-Beweise 2

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $f, g : V \to V$ zwei lineare Abbildungen mit $f + g = id_V$. Beweise folgende Aussagen:
(a) Es gilt $V = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$,
(b) Falls weiterhin gilt $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$, dann gilt auch

$$f \circ f = f, \quad g \circ g = g, \quad f \circ g = g \circ f = 0.$$

Aufgabe 14: Erzeugnis

Betrachte $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum und bestimme $\langle \mathbb{N} \rangle \subset \mathbb{R}$.