Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs

Theoretische Physik 1 (Mechanik)

SS 2018

Probeklausur Lösung

Daniel Sick
Maximilian Ries

1 Aufgabe 1

Ein Teilchen der Masse m bewege sich entlang einer Geraden und es wirke die Rückstellkraft

$$F(x) = -Dx - \alpha x^3, \qquad D,\, \alpha > 0$$

Wie lautet das zugehörige eindimensionale Potential $U(x)$?
Berechnen Sie die Periode T der Schwingung für den leicht anharmonischen Fall: $\alpha E \ll D^2$, wobei $E > 0$ die Energie ist.
Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $\sin^2\phi = \frac{U(x)}{E}$ und drücken Sie x und $\mathrm{d}x$ in Abhängigkeit von ϕ bis zur ersten Ordnung in α aus.

Lösung

Das zugehörige Potential ergibt sich zu:

$$U(x) = -\int_0^x \mathrm{d}x' F(x') = \frac{D}{2}x^2 + \frac{\alpha}{4}x^4,$$

wobei wir es so gewählt haben, dass es für $x = 0$ verschwindet. Wir berechnen die Periode der Schwingung:

$$T = \sqrt{2m}\int_{-x_1}^{x_1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - U(x)}} = \sqrt{\frac{8m}{E}}\int_0^{x_1} \mathrm{d}x \left[1 - \frac{U(x)}{E}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Und nutzen nun die angegebene Substitution:

$$\begin{aligned} \sin^2\varphi &= \frac{U(x)}{E} \\ \frac{D}{2}x^2 + \frac{\alpha}{4}x^4 - E\sin^2\varphi &= 0 \end{aligned}$$

Auflösen nach x^2 liefert:

$$x^2 = \frac{D}{\alpha}\left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\alpha E}{D^2}\sin^2\varphi}\right]$$

Da α, $D > 0$ macht nur die Lösung mit $+$ Sinn. Die Entwicklung in α ergibt:

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{D}{\alpha}\left[-1 + (1 + \frac{2\alpha E}{D^2}\sin^2\varphi - 2\frac{\alpha^2 E^2}{D^4}\sin^4\varphi)\right] \\ &= \frac{2E}{D}\sin^2\varphi(1 - \frac{\alpha E}{D^2}\sin^2\varphi) \end{aligned}$$

Damit lautet

$$x = \pm\sqrt{\frac{2E}{D}}\sin\varphi\sqrt{1-\frac{\alpha E}{D^2}\sin^2\varphi}$$

Wir entwickeln erneut in α und wählen die positive Lösung:

$$x = \sqrt{\frac{2E}{D}}\sin\varphi(1-\frac{\alpha E}{2D^2}\sin^2\varphi)$$

Wir stellen fest, dass $U(x_1) = E$ mit $\sin\varphi = \frac{U}{E}$ bedeutet, dass $\varphi = \frac{\pi}{2}$ dem Umkehrpunkt x_1 entspricht.
Es gilt:

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}\varphi\frac{2E}{D}\cos\varphi(1-\frac{3\alpha E}{2D^2}\sin^2\varphi)$$

etzen wir dies in unsere ursprüngliche Gleichung für T ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
T &= 2\sqrt{\frac{2m}{E}}\sqrt{\frac{2E}{D}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi}(1-\frac{3\alpha E}{2D^2}\sin^2\varphi) \\
&= 4\sqrt{\frac{m}{D}}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\frac{3\alpha E}{4D^2}) \\
&= 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}(1-\frac{3\alpha E}{4D^2}
\end{aligned}$$

2 Aufgabe 2

Eine Perle der Masse m gleite reibungsfrei auf einem vertikal stehenden Ring vom Radius R. Der Ring rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um seinen Durchmesser im homogenen Schwerefeld $g\vec{e_z}$.
Formulieren und klassifizieren Sie die Zwangsbedingungen. Wie lautet die Lagrangegleichung 2. Art? Lösen Sie die Bewegungsgleichung für kleine Ausschläge θ zur Anfangsbedingung $\dot{\theta}(0) = 0$.

Lösung

Verwende Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}
x &= R\sin\theta\cos\omega t \\
y &= R\sin\theta\sin\omega t \\
z &= -R\cos\theta
\end{aligned}$$

mit Radius $r = R$ Azimuthalwinkel $\varphi = \omega t$, $\dot{r} = 0$, $\dot{\varphi} = \omega$. Die kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}^2) \\ &= \frac{m}{2} R^2 (\dot{\theta}^2 \omega^2 \sin^2\theta) \end{aligned}$$

Potentielle Energie:

$$U = mgz = -mgR\cos\theta$$

Lagrangefunktion:

$$L = T - U = \frac{m}{2} R^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta) + mgR\cos\theta$$

Lagrangegleichung 2.Art:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{\partial L}{\partial \theta} \\ \Rightarrow mR^2\ddot{\theta} &= mR^2\omega \sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta \end{aligned}$$

Zwangsbedingungen:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 &= R^2 && \text{holonom-skleronom} \\ \frac{y}{x} &= \tan\omega t && \text{holonom-rhéonom} \end{aligned}$$

Für kleine Ausschläge nähere $\sin\theta \approx \theta$ und $\cos\theta \approx 1$

$$mR^2\ddot{\theta} = (mR^2\omega^2 - mgR)\theta\ddot{\theta} \qquad = (\omega^2 - \frac{g}{R})\theta$$

Für $|\omega| < \sqrt{g/R}$ (genügend langsame Rotation)

$$\Rightarrow \theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{R} - \omega^2 t}\right) \text{ zur Anfangsbedingung } \dot{\theta(0)} = 0$$

Im Fall $|\omega| > \sqrt{g/R}$ (schnelle Rotation) ergibt sich die exponentiell anwachsende Lösung

$$\theta(t) = \theta_0 \cosh\left(\sqrt{\omega^2 - \frac{g}{R}} t\right)$$

Achtung: Wegen Kleinwinkelnäherung gilt die Lösung für schnelle Rotationen nur für sehr kleine Zeiten!

3 Aufgabe 3

Bestimmen Sie die minimale Roationsfläche einer Seifenhaut, die folgendermaßen beschrieben werden kann:

$$\text{Fläche} = I[y] = 2\pi \int_a^b \mathrm{d}x\, y\sqrt{1 + y'^2}, \qquad F(y, y', x) = y\sqrt{q + y'^2}$$

Lösung

Falls die Integrandenfunktion $F(y, y')$ nicht explizit von x abhängt, dann ist die Euler-Lagrangegleichung gleichwertig zu einem Erhaltungssatz:

$$y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F = const. \tag{1}$$

Die zeitliche Änderung der Größe $y'\partial F/\partial y' - F$ verschwindet in der Tat:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F\right] = y''\frac{\partial F}{\partial y'} + y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} - y'\frac{\partial F}{\partial y} - y''\frac{\partial F}{\partial y'} - \underbrace{=0}\,\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

Somit erhalten wir für unsere Minimalflächenproblem:

$$y\left(\frac{y'^2}{\sqrt{y + y'^2}} - \sqrt{1 + y'^2}\right) = -\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = -c = const.$$

$$y = c\sqrt{1 + y'^2}$$

Quadrieren und nach y' auflösen ergibt:

$$y' = \frac{1}{c}\sqrt{y^2 - c^2} \text{ das Vorzeichen in c enthalten}$$

Trennen der Variablen und Integrieren liefert:

$$\frac{c\,\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 - c^2}} = \mathrm{d}x, \qquad\qquad c\ln(y + \sqrt{y^2 - c^2}) = x + c'$$

$$\frac{y}{c} + \sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1} = e^{\frac{x+d}{c}}$$

mit der neuen Konstanten $d = c' - c\ln c$. Nach einer weiteren Umformung erhält man:

$$\frac{y^2}{c^2} - 1 = \left(e^{\frac{x+d}{c}} - \frac{y}{c}\right)^2 = e^{\frac{2(x+d)}{c}} - \frac{2y}{c}e^{\frac{x+d}{c}} + \frac{y^2}{c^2},$$

$$y = \frac{c}{2}\left(\frac{x+d}{c} + \frac{-(x+d)}{c}\right) \Rightarrow y = c\cosh\frac{x+d}{c}$$

4 Aufgabe 4

Berechnen Sie das Trägheitsmoment einer homogenen Halbkugel, die auf ihrer gewölbten Seite liegt, bezüglich einer Schaukelbewegung.
Hinweis: Sie können das Problem vereinfachen, indem Sie zunächst den Abstand des Schwerpunkts vom Mittelpunkt berechnen.

Lösung

Zunächst berechnen wir den Abstand a des Schwerpunkts S vom Mittelpunkt des Grundkreises:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{1}{V}\int_0^R \mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi r^2 \sin\vartheta \underbrace{r\cdot\cos\vartheta}_{=z} \\
&= \frac{3}{2\pi R^3}\frac{R^4}{4}2\pi \underbrace{\frac{1}{2}\sin^2\vartheta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{3R}{8}
\end{aligned}
$$

Das Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunkts Θ_S erhalten wir über den Satz von Steiner:

$$\Theta_0 = \Theta_S + Ma^2$$

Berechnen wir also Θ_0:

$$
\begin{aligned}
\Theta_0 &= \frac{3M}{2\pi R^3}\int_0^R \mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi r^2 \sin\vartheta \underbrace{r^2\sin^2\vartheta}_{=x^2+y^2} \\
&= \frac{2}{5}MR^2
\end{aligned}
$$

$$\Theta_S = \Theta_0 - Ma^2 = \frac{83}{320}MR^2$$