Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs

Theoretische Physik 1 (Mechanik)

SS 2018

Lösung Aufgabenblatt 4

Daniel Sick
Maximilian Ries

1 Aufgabe 1

Ein Kreiskegel (homogen verteilte Masse m, Höhe h, Radius r der Grundfläche) liegt in einer Ebene und rollt gleichförmig um seine Kegelspitze. Ein Umlauf benötigt die Zeit τ. Drücken Sie die kinetische Energie T_{kin} des Kegels in Abhängigkeit der beschreibenden Parameter aus.

Lösung

Das Kegelvolumen ergibt sich zu:

$$V = \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{\frac{zr}{h}} \rho \, \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

Die Nichtdiagonalelemente des Trägheitstensors verschwinden aufgrund der Symmetrie des betrachteten Problems, wir müssen also nur die Diagonalelemente berechnen:

$$\begin{aligned}\Theta_{zz} &= \frac{3m}{\pi r^2 h} \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{\frac{zr}{h}} \rho \, \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \left(\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi\right) \mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{3}{10} m r^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta_{xx} = \Theta_{yy} &= \frac{3m}{\pi r^2 h} \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{\frac{zr}{h}} \rho \, \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \left(z^2 + \underbrace{\rho^2 \sin^2 \varphi}_{\text{oder } \rho^2 \cos^2 \varphi} \right) \mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{3m}{20} (4h^2 + r^2)\end{aligned}$$

Die kinetische Energie setzt sich zusammen aus der Rotation des Kegels um seine Spitze mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = \frac{2\pi}{\tau}$, die senkrecht auf der Ebene steht und der Rotation des Kegels um seine Symmetrieachse. Die Winkelgeschwindigkeit der Rotation um die Symmetrieachse bezeichnen wir mit $\omega_2 = \frac{2\pi}{\tau} \frac{\sqrt{h^2+r^2}}{r}$. Ihr Vektor zeigt in die negative $\vec{e}_z$-Richtung. Nun stellen wir die momentane (gesamte) Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ dar, indem wir die vorher bestimmten Winkelgeschwindigkeiten vektoriell addieren:

$$\vec{\omega} = \frac{2\pi}{\tau} \left[\underbrace{\frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} \vec{e}_x + \frac{r}{\sqrt{h^2 + r^2}} \vec{e}_z}_{\hat{\omega}_1} - \underbrace{\frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{r}}_{\hat{\omega}_2} \vec{e}_z \right]$$

Daraus finden wir die Komponenten ω_x und ω_z, welche wir nutzen, um die kinetische Energie auszudrücken:

$$\begin{aligned}T_{kin} &= \frac{1}{2}\left(\Theta_{xx}\omega_x^2 + \Theta_{zz}\omega_z^2\right)\\ &= \frac{3\pi^2 mh^2}{10\tau^2}\frac{6h^2+r^2}{h^2+r^2}\end{aligned}$$

2 Aufgabe 2

Betrachten Sie eine Vollkugel und einen Vollzylinder (jewils mit Radius R) auf einer schiefen Ebene. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment einer Vollkugel und eines Vollzylinders um deren jeweilige Symmetrieachse. Ermitteln Sie nun die kinetische Energie und berechnen Sie daraus die Rollzeiten der beiden Körper (in Abhängigkeit vom Neigungswinkel α). Vergleichen Sie die beiden Rollzeiten.

Lösung

Zunächst berechnen wir die Trrägheitsmomente, beginnend mit der Vollkugel.
Wir benutzen die Substitution $\xi = \cos\vartheta$.

$$\begin{aligned}\Theta_K &= \frac{M}{V}\int \mathrm{d}^3 r(x^2+y^2)\\ &= \frac{3M}{4\pi R^3}\int_0^R \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi r^2 \sin\vartheta r^2 \sin^2\vartheta\\ &= \frac{3M}{2R^3}\int_0^R \mathrm{d}r r^4 \int_{-1}^1 \mathrm{d}\xi(1-\xi^2)\\ &= \frac{2}{5}MR^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta_Z &= \frac{M}{V}\int \mathrm{d}^3 r(x^2+y^2)\\ &= \frac{M}{\pi R^2 h}\int_0^h \mathrm{d}z \int_0^R \mathrm{d}r r^3 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\\ &= \frac{M}{2}R^2\end{aligned}$$

Die kinetische Energie E der beiden Körper setzt sich jeweils aus einem Translationsanteil des Schwerpunkts und einem Rotationsanteil zusammen. Wir erhalten für die Kugel:

$$E_K = \frac{M}{2}\dot{s}^2 + \frac{\Theta_K}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{7}{10}M\dot{s}^2$$

Hierbei haben wir die Rollbedingung $s = R\varphi$ verwendet.
Für den Zylinder ergibt sich:

$$E_Z = \frac{3}{4}M\dot{s}^2$$

Die potentielle Energie beider Körper ist gleich:

$$U_{\text{pot}} = Mg(s\sin\alpha + R\cos\alpha)$$

Damit erhalten wir als Lagrangefunktionen und daraus folgend als Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
L_K &= \frac{7}{10}M\dot{s}^2 - Mgs\sin\alpha \\
\Rightarrow \ddot{s} &= -\frac{5}{7}g\sin\alpha \\
\Rightarrow s(t) &= s_0 - \frac{5}{14}gt^2\sin\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_z &= \frac{3}{4}M\dot{s}^2 - Mgs\sin\alpha \\
\Rightarrow \ddot{s} &= -\frac{2}{3}g\sin\alpha \\
\Rightarrow s(t) &= s_0 - \frac{1}{3}gt^2\sin\alpha
\end{aligned}$$

Die Beschleunigung der Kugel ist also größer als die des Zylinders, weshalb sie auch schneller unten ist.
Die Rollzeit T der Körper von $s = s_0$ bis $s = 0$ beträgt:

$$\begin{aligned}
T_K &= \sqrt{\frac{14s_0}{5g\sin\alpha}} \\
T_Z &= \sqrt{\frac{3s_0}{g\sin\alpha}} \\
\Rightarrow \frac{T_Z}{T_K} &= \sqrt{\frac{15}{14}} \approx 1,0351
\end{aligned}$$

3 Aufgabe 3

Betrachten Sie drei auf einem Ring (Radius R) angeordnete Massenpunkte (Masse m), die jeweils durch gleich lange Federn mit Federkonstante f verbunden sind. Im Ruhezustand sollen die Federn ihre Ruhelänge haben. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für dieses System auf und lösen Sie diese. Erklären Sie die Komponente(n) der Lösung.
Hinweis: Überlegen Sie, wie die Auslenkung der Federn dargestellt werden kann und nutzen Sie die Matrixschreibweise, um die Eigenfrequnezen des Systems zu bestimmen.

Lösung

Wir können das Geschwindigkeitsquadrat des j-ten Massenpunkts durch $v_j^2 = R^2\dot{\varphi_j}^2$ ausdrücken. Damit ergibt sich die kinetische Energie:

$$T = \frac{m}{2}R^2(\dot{\varphi_1}^2 + \dot{\varphi_2}^2 + \dot{\varphi_3}^2)$$

Nutzen wir

$$R(\varphi_2 - \varphi_1), \quad R(\varphi_3 - \varphi_2, \quad R(\varphi_1 - \varphi_3)$$

als Dehnung der Federn, erhalten wir die potentielle Energie:

$$U = \frac{f}{2}R^2\left[(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + (\varphi_3 - \varphi_2)^2 + (\varphi_1 - \varphi_3)^2\right]$$

Unter Anwendung der Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_j} - \frac{\partial L}{\partial\varphi_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, 3)$$

erhalten wir die Bewegungsgleichung in Matrixdarstellung:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{f}{m}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{:=A}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Mit dem Standardansatz $\vec{\varphi} = \vec{a}e^{i\omega t}$ führt dies zu:

$$\omega^2\vec{a} = A\vec{a}$$

Wir berechnen die Eigenfrequenzen ω des Systems (abzulesen aus dem charakteristischen Polynom):

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = \omega_3 = \sqrt{\frac{3f}{m}}$$

Bestimmen wir nun noch die zu den Eigenfrequenzen gehörenden Eigenwerte, können wir die allgemeine Bewegungsgleichung angeben:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \varphi_3(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(a_1 + v_1 t)}_{\substack{\text{Drehung aller Massenpunkte} \\ \text{ohne Beanspruchung der Federn.}}}$$

$$+ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} a_2 \cos\left(\sqrt{\frac{3f}{m}}t + \beta_2\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} a_3 \cos\left(\sqrt{\frac{3f}{m}}t + \beta_3\right)}_{\substack{\text{Ein Massepunkt ruht, die beiden} \\ \text{anderen schwingen gegenphasig.}}}$$