Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs

Theoretische Physik 1 (Mechanik)

SS 2018

Aufgabenblatt 3 Lösung

Daniel Sick
Maximilian Ries

1 Drehimpuls und Energie im Kraftfeld

Für welche Kombinationen der Parameter a, b, c gelten im Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = (ax^2 - y^2, 2bxy, cz),$$

der Erhaltungssatz des Drehimpulses $\vec{L}$ oder der Erhaltungssatz der Energie E? Bestimmen Sie gegebenenfalls das zugehörige Potential $U(\vec{r})$.

Lösung: Das Kraftfeld sei

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} ax^2 - y^2 \\ 2bxy \\ cz \end{pmatrix}$$

Drehimpuls ist erhalten, falls $\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = 0$ gilt.

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = m(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}) + m(\vec{r}) \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\begin{aligned}\vec{r} \times \vec{F} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ax^2 - y^2 \\ 2bxy \\ cz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ycz - z2bxy \\ zax^2 - zy^2 - xcz \\ 2bxy^2 - yax^2 + y^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (c - 2bx)yz \\ (ax^2 - y^2 - cx)z \\ (2bx^2 - ax^2 + y^2)y \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Es gibt Kombinationen von a,b,c, sodass $\vec{r} \times \vec{F} = 0$ gilt. Drehimpulserhaltung ist somit erhalten! z.B. $a = \frac{y^2+x}{x^2}$, $b = 1/2x$, $c = 1$.

Energieerhaltung fordert $rot\vec{F} = 0$:

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ax^2 - y^2 \\ 2bxy \\ cz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2by + 2y \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow b = -1$, $\vec{F} = \begin{pmatrix} ax^2 - y^2 \\ 2bxy \\ cz \end{pmatrix}$ ist ein konservaties Kraftfeld und damit gilt auch Energieerhaltung.

Um aus einem gegebenen konservativen Kraftfeld ein potential zu bestimmen, verwenden wir aus der Vorlesung

$$U(\vec{r}) - U(\vec{r_0}) = -\int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}') \text{ für } \underline{\text{beliebigen}} \text{ Weg von } \vec{r_0} \text{ nach } \vec{r}$$

Wir wählen $\vec{r_0} = 0$ und als Verbindungsweg eine Gerade:

$$\begin{aligned} U(\vec{r}) &= -\int_0^1 d\tau \vec{r} \cdot \vec{F}(< tau\vec{r}),\; d\vec{r} = \vec{r} d\tau \\ &= -\int_0^1 d\tau [x(ax^2 - y^2)\tau^2 - 2xy^2\tau^2 + cz^2\tau] \\ &= -\frac{a}{3}x^3 + xy^2 - \frac{c}{2}z^2 \end{aligned}$$

Und damit

$$\boxed{U(\vec{r}) = -\frac{a}{3}x^3 + xy^2 - \frac{c}{2}z^2} \tag{1}$$

2 Elektron im Magnetfeld eines magnetischen Monopols

Ein Elektron (Masse m und Ladung $-e$) bewege sich in dem Magnetfeld eines im Ursprung fixierten magnetischen Monopols mit der magnetischen Feldstärke $\vec{B}(\vec{r}) = g\frac{\vec{r}}{r^3}$. Geben Sie die Bewegungsgleichung des Elektrons an (Lorentzkraft: $\vec{F}_L = -e\vec{v} \times \vec{B}$). Zeigen Sie, dass $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} + eg\vec{r}/r$ eine Erhaltungsgröße ist und folgern Sie hieraus, dass die Bewegung auf der Oberfläche eines Kegels (mit der Spitze im Ursprung) stattfindet. Geben Sie den Öffnungswinkel 2Θ des Kegels an. Zur Kontrolle: $\cos\Theta = eg/J$. Geben Sie nun vereinfachte Bewegungsgleichungen in Kugelkoordinaten r, Θ, φ an. Lösen sie diese zu den Randbedingungen $\varphi(0) = 0$ und $r(0) = r_0$, wobei r_0 der minimale Abstand des Elektrons vom Ursprung ist. Sie können die Erhaltung der kinetischen Energie $T_{kin} = m\vec{v}^2/2$ verwenden. Zeigen Sie schließlich, dass die Bahnkurve $r = r(\varphi)$ auf dem Kegel die folgende Form hat:

$$r(\varphi) = \frac{r_0}{\cos(\varphi \sin\Theta)} \qquad\qquad \sin\Theta = \sqrt{1 - (eg/J)^2}.$$

Diese Kurve entstammt von einer Geraden in der Ebene, die zum Kegel aufgerollt wurde. Bei welcher Anfangsbedingung trifft das Elektron auf den magnetischen Monopol?

Lösung: Elektron (Masse m und Ladung $-e$) im Feld $\vec{B} = g\frac{\vec{r}}{r^3}$ eines magnetischen Monopols. Die Bewegungsgleichung ist

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_L = -e(\dot{\vec{r}} \times \vec{B}) = \frac{eg}{r^3}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})} \tag{2}$$

Wir testen, $\vec{J} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} + \frac{eg\vec{r}}{r}$ eine Erhaltungsgröße ist:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\vec{J} &= m\underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} + m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + eg\left(\frac{\dot{\vec{r}}}{r} - r\frac{\vec{\dot{r}}}{r^2}\right) \\
&\underset{m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}_L}{=} \frac{eg}{r^3}(\dot{\vec{r}}r^2 - \vec{r}\dot{r}r + \vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})) \\
&\underset{\vec{r}^2=r^2 \Rightarrow \vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}=r\dot{r}}{=} \frac{eg}{r^3}(\dot{\vec{r}}\vec{r}^2 - \vec{r}\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} + \vec{r}\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}\vec{r}^2) = 0\checkmark
\end{aligned}
$$

$\vec{J}$ ist somit zeitlich konstant.

$$\vec{J} \cdot \vec{r} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{r} + egr \Rightarrow \vec{J} \cdot \vec{e_r} = eg$$

Der Winkel zwischen $\vec{J}$ und $\vec{r}$ ist fest $\Rightarrow$ Bewegung auf einem Kegel.

Öffnungswinkel $e\Theta$ des Kegels ist gegeben durch

$$\boxed{cos\Theta = J \cdot \vec{e_r} = \frac{eg}{J} \qquad (3)}$$

wobei $J = \vec{J}/\left|\vec{J}\right|$, mit $\left|\vec{J}\right| =: J$.

Wähle z-Achse in Richtung von $\vec{J}$ und führe Kugelkoordinaten ein, mit $\Theta = \text{const.}$ Wir verwenden $\ddot{\vec{r}}$ in Kugelkoordinaten in der Bewegungsgleichung (3) mit

$$
\begin{aligned}
\frac{eg}{r^2}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) &= \frac{eg}{r^2}(\vec{e_r} \times (\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\Theta}\vec{e_\Theta} + r\sin\Theta\dot{\varphi}\vec{e_\varphi})) \\
&= \frac{eg}{r^2}(r\dot{\Theta}\vec{e_\varphi} + r\sin\Theta\dot{\varphi}\vec{e_\Theta})
\end{aligned}
$$

. Mit $\dot{\Theta} = 0$ werden die Koeffizientengleichungen zu:

$$\ddot{r} - r\sin^2\Theta\dot{\varphi}^2 = 0 \qquad (4)$$

$$mr\cos\Theta\dot{\varphi} = \frac{eg}{r} \overset{(3)}{\Rightarrow} \dot{\varphi} = \frac{J}{mr^2} \qquad (5)$$

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0 \qquad (6)$$

Mit $\dot{\varphi} = \frac{J}{mr^2}$ lautet Gl. (4):

$$\ddot{r} = \frac{J^2\sin^2\Theta}{m^2r^3} = \frac{J^2}{m^2r^3}\left(1 - \frac{e^2g^2}{J^2}\right) = \frac{J^2 - e^2g^2}{m^2r^3}$$

multipliziere mit $2\dot{r}$

$$\Rightarrow (\frac{d}{dt}\dot{r}^2) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{J^2 - e^2g^2}{m^2r^2}\right)$$

und somit gilt $\dot{r}^2 = c^2 - \frac{\alpha^2}{r^2}$ mit $\alpha = \frac{1}{m}\sqrt{J^2 - e^2 g^2}$ und einer Integrationskonstanten c Integriert man dies nocheinmal mit Variablenseperation so liefert es

$$t = \frac{1}{c^2}\sqrt{c^2 r^2 - \alpha^2}$$

Mit der Randbedingung $r(0) = r_0$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{c} = r_0$$

und somit $r = \sqrt{c^2 t^2 + r_0^2}$ und lässt sich auch $\dot{\varphi} = ...$ mit Variablenseperation lösen und es ergibt sich

$$\varphi = \frac{J}{mcr_0} \arctan \frac{tc}{r_0} \tag{7}$$

Nun wollen wir die Bahnkurve $r(\varphi)$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
ct &= r_0 \tan\left(\frac{mcr_0\varphi}{J}\right) \\
\Rightarrow c^2t^2 + r_0^2 &= r_0^2\left[1 + \tan^2\left(\frac{mcr_0\varphi}{J}\right)\right] \\
&= \frac{r_0^2}{\cos^2\left(\frac{mcr_0\varphi}{J}\right)} \\
\Rightarrow r(\varphi) &= \frac{r_0}{\cos\left(\sqrt{1 - \left(\frac{eg}{J}\right)^2}\varphi\right)}
\end{aligned}$$

wobei $mcr_0 = m\alpha = \sqrt{J^2 - e^2g^2}$ verwendet wurde. Mit $\cos\Theta = \frac{eg}{J}$ folgt, $\sin\Theta = \sqrt{1 - \left(\frac{eg}{J}\right)^2}$ und somit ergibt sich

$$\boxed{r(\varphi) = \frac{r_0}{\varphi \sin\Theta}}$$

Das Teilchen trifft auf dem Monopol, wenn es ein φ_0 gibt, sodass $r(\varphi_0) = 0$ gilt. Diese Bedingung ist jedoch nur dann zu erfüllen, wenn $r_0 = 0$ gilt, also $\alpha = 0$ und damit $J = eg$. Dann ist $\Theta = 0$ und $\vec{r}||\dot{\vec{r}}$.

3 Fallende Kette

Eine feingliedrige Kette der Länge L und Masse m (konstante Masse pro Länge $\mu = m/L$) werde so über einer Tischplatte festgehalten, dass das unterste Glied diese gerade berührt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde die Kette losgelassen. Es wirke nur die Fallbeschleunigung g nach unten. Verwenden Sie als generalisierte Koordinate die Höhe z des obersten Kettenglieds. Stellen Sie die Lagrangefunktion $L(z, \dot{z})$ des Systems auf und berechnen Sie daraus die (nichtlineare) Bewegungsgleichung für z. Zeigen Sie, dass die Energieerhaltung gilt und geben Sie die Geschwindigkeit $|\dot{z}|$ des obersten Kettenglieds als Funktion der Höhe $0 < z < L$ an. Berechnen Sie die Fallzeit τ der Kette. Sie werden auf das elliptische Integral $\int_0^{\pi/2} dx \sqrt{\sin x} = 1,19814$ stoßen. Vergleichen Sie das Ergebnis für τ mit der Zeit τ_0, die dieselbe Kette benötigt, um neben dem Tisch die Strecke L frei zu fallen. Wie erklären Sie sich die unterschiedlichen Fallzeiten?

Lösung: Als generalisierte Koordinate wähle die Höhe des obersten Kottenglieds, z. Die im Schwerefeld bewegte Masse ist μz, jedes Kettenglied hat die Geschwindigkeit $\dot{z}$; Die kinetische Energie ist $T = \frac{\mu}{2} z \dot{z}^2$. Der Schwerpunkt des Kettenstücks über dem Tisch liegt auf halber Höhe $z/2$. Die potentielle Energie beträgt $U = \mu z g \frac{z}{2} = \frac{\mu g}{2} z^2$. Lagrangefunktion

$$\boxed{L = T - U = \frac{\mu}{2}(z\dot{z}^2 - gz^2)}$$

Bewegungsgleichung: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial L}{\partial z}$

$$\frac{d}{dt}(\mu z \dot{z}) = \mu(\dot{z}^2 + z\ddot{z}) = \frac{\mu}{2}(\dot{z} - 2gz)$$

$$z\ddot{z} + \frac{z^2}{2} + gz = 0$$

Wir zeigen Energieerhaltung

$$E = T + U = \frac{\mu}{2}(z\dot{z}^2 - gz^2) \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{\mu}{2}(\dot{z}\dot{z}^2 + 2z\dot{z}\ddot{z} + 2gz\dot{z}) \\ &= \mu\dot{z}\underbrace{(z\ddot{z} + \frac{\dot{z}^2}{2} + gz)}_{\text{=0, laut Bewegungsgleichung}} = 0 \checkmark \end{aligned}$$

Mit Energieerhaltung folgt aus (8)

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2}(z\dot{z}^2 - gz^2) &= \frac{\mu}{2} g L^2, \text{ denn } z(0) = L,\ \dot{z}(0) = 0 \\ z\dot{z}^2 &= g(L^2 - z^2) \\ \dot{z} &= -\sqrt{\frac{g}{z}(L^2 - z^2)}, \text{ mit } \dot{z} < 0, \text{ denn die Kette fällt} \end{aligned}$$

somit

$$dt = -dz\sqrt{\frac{z}{g(L^2 - z^2)}}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Fallzeit } \tau = \int_0^\tau d\tau' = \int_0^L dz \frac{1}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{z}{L^2 - z^2}}$$

$$\stackrel{(*)}{=} \sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2} dx\sqrt{\sin x} = \sqrt{\frac{2L}{\pi g}}\Gamma^2(3/4) = \sqrt{\frac{2L}{g}}\frac{1,19814}{\sqrt{2}}$$

$$= 0,847213\sqrt{\frac{2L}{g}}$$

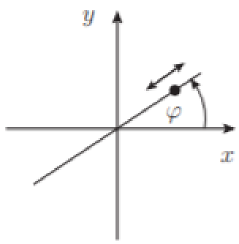
mit $(*)$: $z = L\sin x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und $dz = dxL\cos x$.

Das Weg-Zeit-Gesetz für eine frei (neben dem Tisch) fallende Kette ist $z(t) = L - \frac{g}{2}t^2$; somit $\tau_0 = \sqrt{\frac{2L}{g}}$. Überraschendes Ergebnis: $\tau < \tau_0$ (kürzere Fallzeit). Die auf dem Tisch auftreffenden Kettenglieder werden von der Geschwindigkeit $|\dot{z}|$ auf 0 abgebremst. Aufgrund der Energieerhaltung wird deren kinetische Energie an den Rest der Kette über dem Tisch abgegeben.

Problem: Lässt sich das beschriebene mechanische System ohne dissipative Effekte, die Energie in Wärme umwandeln wirklich realisieren?

4 Massepunkt auf unendlich langer, rotierender Stange

Ein Massenpunkt m bewegt sich reibungsfrei auf einer unendlich langen geraden Stange vernachlässigbarer Masse, welche mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$ in der xy-Ebene rotiert (siehe Skizze). Es wirken keine weiteren (eingeprägten) Kräfte. Stellen Sie die Lagrangefunktion L des Systems auf und geben Sie die Bewegungsgleichung für den Abstand $r(t)$ des Massenpunktes von der Drehachse an. Lösen Sie diese Bewegungsgleichung zur Anfangsbedingung $r(0) = r_0 0$, $\dot{r}(0) = v_0$. Welche spezielle Lösung ergibt sich für $v_0 = -\omega r_0$? Bestimmen Sie aus der vorgegebenen Winkelbewegung $\varphi(t)$ die Zwangskraft $Z_\varphi = ma_\varphi$.



Lösung: In Polarkoordinaten ist $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$ und die konstante Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$. Die Lagrangefunktion ist

$$L = T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2)$$

Die Bewegungsgleichung ergibt sich aus der Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial t}$$

zu

$$\boxed{m\ddot{r} = m\omega^2 r} \tag{9}$$

Diese lösen wir mit dem Ansatz

$$r(t) = a\exp(\omega t) + b\exp(-\omega t)$$

Die Anfangsbedingungen sind $r(0) = r_0$ und $\dot{r}(0) = v_0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad & r(0) = r_0 = a + b \quad & \quad \dot{r}(0) = v_0 = (a-b)\omega \\ &\Rightarrow \quad & a = (r_0 + \frac{v_0}{\omega})/2 \quad & \quad b = (r_0 - \frac{v_0}{\omega})/2 \end{aligned}$$

Mit $\cosh(\omega t) = \frac{1}{2}(\exp(-\omega t) + \exp(\omega t))$ und $\sinh(\omega t) = \frac{1}{2}(\exp(\omega t) - \exp(-\omega t))$ ergibt sich

$$\boxed{r(t) = r_0\cosh(wt) + \frac{v_0}{\omega}\sinh(\omega t)}$$

Spezialfall $v_0 = -\omega r_0$:

$$\Rightarrow r(t) = r_0\exp(-\omega t)$$

Also bewegt sich der Massenpunkt zum Zentrum $r = 0$. Die Bewegungsgleichung für den Winkel ergibt sich durch Multiplikation von $m\vec{a}$ mit $\vec{e_\varphi}$

$$m\vec{a_\varphi} = m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \tag{10}$$

Da keine weiteren eingeprägten Kräfte wirken, entspricht dies der Zwangskraft Z_φ:

$$Z_\varphi = m(\underbrace{r\ddot{\varphi}}_{=0,\text{ da }\ddot{\varphi}=0} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = 2m\omega\dot{r}$$

Somit ist die Zwangskraft Z_φ zeitabhängig.