Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs

Theoretische Physik 1 (Mechanik)

SS 2018

Aufgabenblatt 2 Lösung

Daniel Sick
Maximilian Ries

1 Streuung eines Teilchens am reziproken Potential

Für die Streuung eines Teilchens der Energie E im abgeschnittenen 1/r-Potential:

$$U(r) = \Gamma\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \text{ für } r \leq R,\; U(r) = 0 \text{ für } r > R,$$

ergibt sich (nach einer etwas längeren Rechnung) die folgende Abhängigkeit des Streuwinkels Θ vom Stoßparameter $b < R$:

$$\Theta(b) = 2arcsin\sqrt{\frac{\Gamma^2(1 - b^2/R^2)}{\Gamma^2 + 4Eb^2(E + \Gamma/R)}}$$

Bestimmen Sie hieraus $b(\Theta)$ und berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$. Diskutieren Sie das Ergebnis: a) im Grenzfall $R \longrightarrow \infty$, b) im Grenzfall $\Gamma \longrightarrow \infty$, c) für den speziellen Energiewert $E = -\Gamma/2R$ bei $\Gamma < 0$.

Hinweis: Es gilt $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\Theta)}{\sin(\Theta)}\left|\frac{db}{d\Theta}\right|$.

Lösung: Man muss nun

$$\sin(\Theta/2) = \frac{\Gamma\sqrt{1 - b^2/R^2}}{\sqrt{\Gamma^2 + 4E^2b^2 + 4Eb^2\Gamma/R}}$$

nach $b(\Theta)$ umformen:

$$[\Gamma^2 + 4Eb^2(E + \Gamma/R)]\sin(\Theta/2) = \Gamma\left(1 - \frac{b^2}{R^2}\right)$$

$$4Eb^2(E + \Gamma/R)\sin^2(\Theta/2) + \frac{b^2\Gamma^2}{R^2}\cdot(cos^2(\Theta/2) + sin^2(\Theta/2)) = \Gamma^2(1 - sin^2(\Theta/2))$$

$$b^2\left[\left(4E^2 + \frac{4E\Gamma}{R} + \Gamma^2/R^2\right)\sin^2(\Theta/2) + \frac{\Gamma^2}{R^2}\cos^2(\Theta/2)\right] = \Gamma^2\cos^2(\Theta/2)$$

Daraus folgt

$$b^2 = \frac{R^2}{1 + \left(1 + \frac{2ER}{\Gamma}\right)^2\tan^2(\Theta/2)}$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt wird zu:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{1}{2\sin(\Theta)}\left(\frac{db^2}{d\Theta}\right) = \frac{R^2}{4\sin(\Theta/2)\cos(\Theta/2)}\frac{(1 + \frac{2ER}{\Gamma})^2 2\frac{\tan(\Theta/2)}{2\cos^2(\Theta/2)}}{\left[1 + \left(1 + \frac{2ER}{\Gamma}\right)^2\tan^2(\Theta/2)\right]^2}$$

wobei $\frac{d}{dx}\tan x = 1/\cos^2 x$ verwendet wurde.

a) Grenzfall $R \longrightarrow \infty$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2 \left(\frac{2ER}{\Gamma}\right)^2}{4\left(\frac{2ER}{\Gamma}\right)^4 \sin^4(\Theta/2)} = \frac{\Gamma^2}{16E^2 \sin^4(\Theta/2)}$$

Dies entspricht dem Rutherford-Streuquerschnitt.

b) Grenzfall $\Gamma \longrightarrow \infty$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4(\cos^2(\Theta/2) + \sin^2(\Theta/2))^2} = R^2/4$$

Dies entspricht dem Streuquerschnitt an der harten Kugel.

c) $E = -\Gamma/2R > 0$ für $\Gamma < 0$: Damit ist $1 + \frac{2ER}{\Gamma} = 0$, womit sich $\frac{d\sigma}{d\Omega} = 0$ für alle Streuwinkel $\Theta \neq \pi$ ergibt. Für $\Theta = \pi$ ist $\cos(\Theta/2) = 0$ und $\sin(\Theta/2) = 1$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4}\left(1 + \frac{2ER}{\Gamma}\right)^{-2} \longrightarrow \infty$$

Für $E = -\frac{\Gamma}{2R}$ ist

$$\Theta(b) = 2\arcsin\sqrt{\frac{\Gamma^2(1 - b^2/R^2)}{\Gamma^2 + 4(-\Gamma/2R)b^2(\Gamma/2R)}} = 2\arcsin(1) = \pi$$

d.h. alle Teilchen werden in Rückwertsrichtung gestreut/zurückgeworfen.

2 Massenpunkt auf Kugel

Ein Massenpunkt liegt im homogenen Schwerefeld auf dem obersten Punkt einer Kugel vom Radius R. Er beginnt von dort (aus der Ruhe) reibungsfrei hinunter zu gleiten. An welcher Stelle (gekennzeichnet durch den Polarwinkel Θ_0) hebt der Massenpunkt von der Kugel ab, bzw. verschwindet die Zwangskraft $\vec{Z}$? Benutzen Sie den Ausdruck für die Beschleunigung in Polarkoordinaten ($x = r\sin\Theta, z = r\cos\Theta$ in der xz-Ebene) und den Energieerhaltungssatz, um den Parameter $\lambda(\Theta)$ für die Zwangskraft $\vec{Z}$ zu bestimmen.

Lösung: Die Zwangsbedingung lautet $g(r,\Theta) = r - R = 0$. Die Zwangskraft sieht so aus: $\vec{Z} = \lambda grad(g) = \lambda\vec{e_r}$ Laagrangegleichung 1. Art für die Bewegung in der xz-Ebene

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \lambda\frac{\vec{r}}{r} \tag{1}$$

mit $\vec{g} = -g\vec{e_z}$, $x = r\sin\Theta$ und $z = r\cos\Theta$. Die Bewegungsgleichung (1) wird mit $\vec{e_r}$ multipliziert:

$$m(\ddot{\vec{r}} - r\dot{\Theta}^2) = -mg\cos\Theta + \lambda$$

Multiplikation von (1) wird mit $\vec{e_\varphi}$ liefert

$$m(r\ddot{\Theta} + 2\dot{r}\dot{\Theta}) = mg\sin\Theta$$

Zweimalige Ableitung von $g(r,\Theta)$ nach t ergibt

$$\ddot{r} = 0 \Rightarrow \lambda = mg\cos\Theta - mR\dot{\Theta}^2 \tag{2}$$

Energieerhaltung liefert:

$$E = T + U = \frac{m}{2}R^2\dot{\Theta}^2 + mgR\cos\Theta = mgR$$

$$\Rightarrow mR\dot{\Theta}^2 = 2mg(1-\cos\Theta)$$

Eingesetzt in (2) erhalten wir:

$$\vec{Z} = \lambda\vec{e_r} = [mg\cos\Theta - 2mg(1-\cos\Theta)]\vec{e_r} = mg(3\cos\Theta - 2)\vec{e_r}$$

Die Zwangskraft verschwindet an der Stelle auf der Kugeloberfläche mit
$\mathbf{\cos\Theta_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow \Theta_0 = 48,19°}$.

3 Atwood'sche Fallmaschine

Zwei Massen m_1 und m_2 sind über ein Seil der Länge $l + \pi R$, welches auf einer masselosen Rolle vom Radius R liegt, miteinander verbunden und auf sie wirkt die Schwerkraft. Bestimmen Sie alle Zwangsbedingungen und stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Massen m_1 und m_2 auf. Lösen Sie diese anschließend mithilfe des Lagrangeformalismus 1. Art. Bestimmen Sie die Gesamtenergie des Systems und weisen Sie nach, ob die Energie eine Erhaltungsgröße ist.

Lösung: Die Zwangsbedingung lauten:

$$z_1 = 0 \qquad z_2 = 0 \qquad y_1 = -R \qquad y_2 = R \qquad x_1 + x_2 = l$$

Die ersten vier Bedingungen führen auf verschwindende Zwangskräfte und somit triviale Lösungen der Bewegungsgleichung. Wir betrachten nun daher nur x_1 und x_2 und die zugehörigen Bewegungsgleichungen:

$$m_1\ddot{x_1} = m_1 g + \lambda, \qquad m_2\ddot{x_2} = m_2 g + \lambda$$

Zweimalige Differentiation der Zwangsbedingung $x_1 + x_2 = l$ nach t ergibt

$$\ddot{x_1} + \ddot{x_2} = 0$$

und in die Bewegungsgleichung eingesetzt, erhält man

$$g + \frac{\lambda}{m_1} + g + \frac{\lambda}{m_2} = 0 \Rightarrow \lambda = -2g\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Die Zwangskräfte auf beide Massen sind gleich

$$\vec{Z_1} = \vec{Z_2} = \lambda \vec{e_x}$$

$\vec{Z_1} + \vec{Z_2}$ wird von der Achse der Rolle aufgenommen. Setzt man die Lösung für λ in eine Bewegungsgleichung ein, so erhält man:

$$m_1 \ddot{x_1} = m_1 g - 2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \qquad (m_1 + m_2)\ddot{x_1} = g(m_1 - m_2)$$

$$\boxed{x_1(t) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \frac{gt^2}{2} + v_0 t + x_0, \qquad x_2(t) = l - x_1(t)}$$

Die Summe der Massen $m_1 + m_2$ geht als träge Masse ein, die Differenz als Schwere. Die Gesamtenergie des Systems

$$E = T + U = \frac{m_1}{2} \dot{x_1}^2 + \frac{m_1}{2} \dot{x_2}^2 - m_1 g x_1 - m_2 g x_2$$

ist erhalten, weil die wirkenden Kräfte $\vec{F_{1,2}} = m_{1,2} g \vec{e_x}$ konservativ sind und die Zwangsbedingung $x_1 + x_2 = l$ nicht explizit von der Zeit abhängt.