Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs

Experimentalphysik 2

SS 2018

Lösung Probeklausur

Hagen Übele
Maximilian Ries

Aufgabe 1 (Coulomb Kraft)

Zwei gleich große Kugeln der Masse $m = 0{,}01\,\mathrm{kg}$ haben gleiche Ladungen $Q = 1 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$ und hängen an zwei Fäden der Länge $l = 1\,\mathrm{m}$ mit gleichem Aufhängepunkt A. Der Aufbau ist in Abbildung 1 dargestellt.

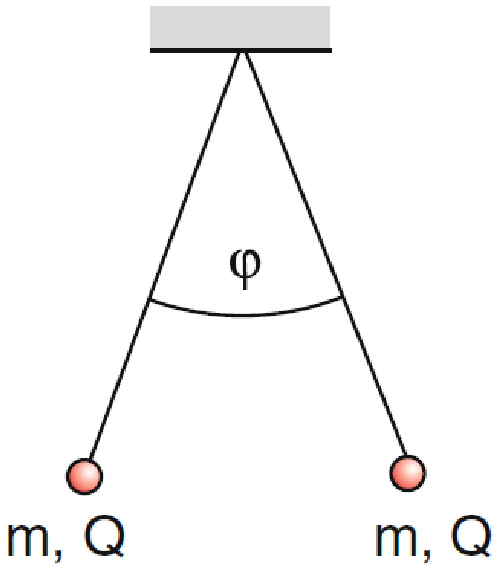


Abbildung 1: Aufbau des Pendels

a) Wie groß ist der Winkel φ?

b) Wi groß ist der Winkel φ, wenn in der vertikalen Symmetrieebene eine leitende Platte mit der Ladungsdichte $\sigma = 1{,}5 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$ steht?

Lösung

a) Die Gesamtkraft muss in Fadenrichtung zeigen:

$$\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{F_{\mathrm{el}}}{m \cdot g} \tag{1}$$

$$F_{\mathrm{el}} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\left(2l \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2} \tag{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^3\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2 \cdot mg} = 2,3 \cdot 10^{-6} \tag{3}$$

$$\Rightarrow \sin(\varphi) \approx \varphi \qquad \text{und} \qquad \cos(\varphi) \approx 1 \qquad\qquad \Rightarrow \varphi \approx 1,5^\circ \tag{4}$$

Das entspricht einem Abstand von $a = 2l \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 2{,}6\,\text{cm}$

b) Die leitende Platte in der Mittelebene erzeugt ein Feld:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{x} \Rightarrow \vec{F}_{\text{el}} = \frac{Q \cdot \sigma}{2\epsilon_0}\hat{x} \tag{5}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{F_{\text{el}}}{m \cdot g} = \frac{Q \cdot \sigma}{2\epsilon_0 m \cdot g} \tag{6}$$

$$= 1,7 \cdot 10^{-2} \tag{7}$$

$$\Rightarrow \varphi = 1^\circ \tag{8}$$

Dies entspricht einem Abstand von der Platte von $x = l \cdot \varphi = 17\,\text{mm}$.

Aufgabe 2 (Potential in einer Reihenschaltung von Kondensatoren)

Auf die linke Platte der Kondensator-Anordnung in Abbildung 2 wird die Ladung $+Q$ gebracht. Drücken Sie das elektrische Feld $E(x)$ und das Potential $\Phi(x)$ in Abhängigkeit von x aus.

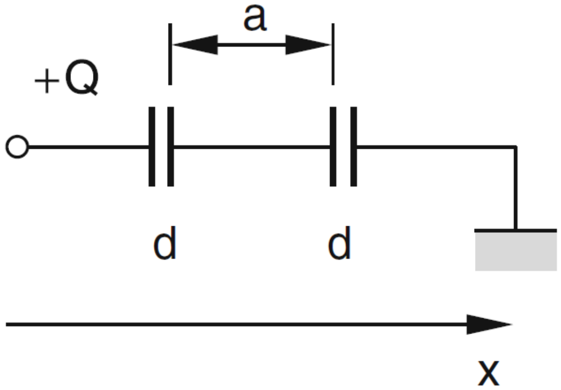


Abbildung 2: Reihenschaltung von Kondensatoren

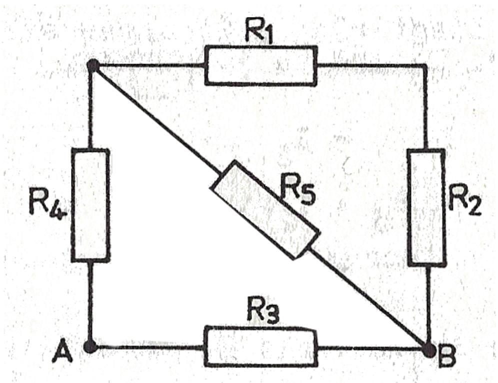
Lösung

Auf der rechten Platte des linken Kondensators in Abbildung 2 wird die Ladung $-\frac{Q}{2}$ durch Influenz erzeugt. Diese muss von der linken Platte des rechten Kondensators abfließen, sodass dort die Restladung $+\frac{Q}{2}$ auftritt. Es gilt dann:

$$E = \frac{U}{d} = \frac{3}{4}\frac{Q}{C \cdot d} \tag{9}$$

Aufgabe 3 (Widerstandschaltung)

Gegeben sei folgende Schaltung von fünf Widerständen.



a) Welchen Gesamtwiderstand R hat die Schaltung zwischen den Punkten A und B?

b) Welche Spannung U liegt zwischen A und B, wenn an A und B eine Spannungsquelle mit der Urspannung U_e und dem Innenwiderstand R_i angeschlossen wird?

c) Welche Stromstärke I_4 hat der Strom, der durch den Widerstand R_4 fließt?

$R_1 = 200\Omega \quad R_2 = 100\ \Omega \quad R_3 = 100\ \Omega \quad R_4 = 50\Omega$
$R_5 = 200\Omega \quad U_e = 6{,}0\ \mathrm{V} \quad R_i = 10\ \Omega$

Lösung

a) R = 63 Ω

b) U = $U_e \frac{R}{R+R_i} = 5{,}2\mathrm{V}$

c) $I_4 = U\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_3}\right) = 30\mathrm{mA}$

Aufgabe 4 (Ampère-Gesetz)

Zwei lange, schlanke Spulen mit Radien $a < b$ sind wie in der Skizze auf der x-Achse angeordnet. Sie werden jeweils in entgegengesetzte Richtungen vom Strom I durchflossen. Die innere Spule hat Windungszahl n_1 pro Einheitslänge, die äußere Spule Windungszahl n_2 pro Einheitslänge.
Berechnen Sie das Magnetfeld für die Bereiche:

a) Innerhalb der inneren Spule.

b) Zwischen den beiden Spulen.

c) Außerhalb beider Spulen.

Lösung

a) Für die Lösung der Aufgabe benutzen wir das Ampère'sche Gesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \tag{10}$$

in seiner Integralform:

$$\oint_C \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \int \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{A} \tag{11}$$

Um das Magnetfeld im Inneren der beiden Spulen zu berechnen, legen wir ein Rechteck in die y-z-Ebene, dessen Seiten parallel zu den Achsen verlaufen. Eine dieser Seiten liegt innerhalb der inneren Spule, die andere Seite außerhalb der äußeren Spule (siehe 1, Rechteck a).
Fü+r lange schmale Spulen ist das Magnetfeld im Inneren der Spule homogen und parallel zur x-Achse ausgerichtet, solange man weit genug von den Enden der Spule entfernt ist. Das Feld außerhalb der Spule muss null sein, damit das Magnetfeld im Unendlichen verschwindet.
Somit ergibt sich aus Gleichung (11) für ein Rechteck mit der Seitenlänge h:

$$(B_i - B_{\text{außen}}) \cdot h = \mu_0 I h (n_1 - n_2) \tag{12}$$

$$B_i = \mu_0 I (n_1 - n_2) \tag{13}$$

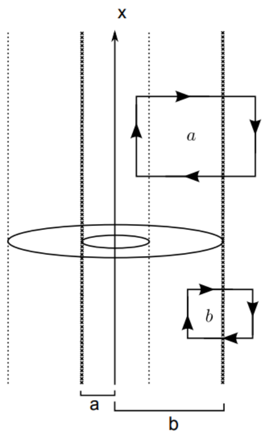
b) Um das Magnetfeld im Zwischenraum zu berechnen, integrieren wir Gleichung (11) über die Fläche b aus der Querschnittsfläche. Da das Magnetfeld der inneren Spule hier keinen Einfluss mehr hat, ergibt sich:

$$\oint_C \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \int \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{A}$$

$$B_z = -I \mu_0 n_2 \tag{14}$$

c)

$$B_{\text{außen}} = 0 \tag{15}$$



Aufgabe 5 (Sperrkreis)

In der in Abbildung 3 gezeigten Anordnung soll trotz anliegender Wechselspannung U kein Strom I fließen.
Wie muss die Kapazität C gewählt werden, wenn die Frequenz f_0 und die Induktivität L gegeben sind?

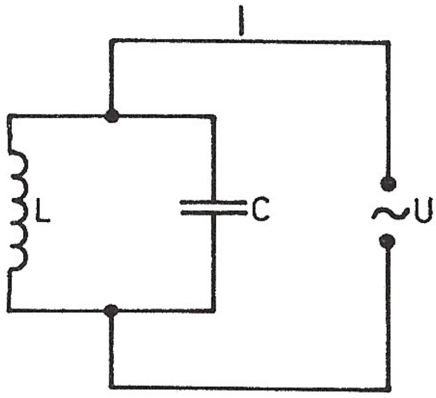


Abbildung 3: Schaltplan zum Sperrkreis

Lösung

Es handelt sich um eine Parallelschaltung. Dem Zeigerdiagramm (Abbildung 4) entnimmt man, dass I_m (und damit auch I) gleich Null ist, wenn die Stromamplituden I_{C_m} und I_{L_m} den gleichen Betrag haben:

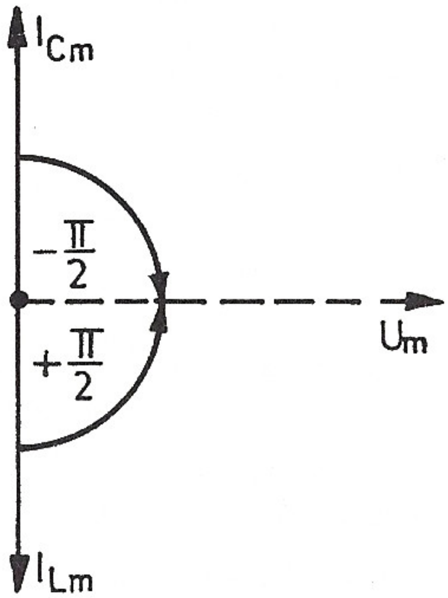


Abbildung 4: Zeigerdiagramm

$$I_{L_m} = I_{C_m} \tag{16}$$

Da $U_{L_m} = U_{C_m} = U_m$ ist, gilt:

$$\frac{U_m}{R_L} = \frac{U_m}{R_C} \tag{17}$$

Mit $R_L = \omega_0 L$ und $R_C = \frac{1}{\omega_0 C}$ erhalten wir

$$\frac{1}{\omega_0 L} = \omega_0 C \tag{18}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L} \tag{19}$$

Aufgabe 6 (Rotierende Kreisscheibe)

Betrachten Sie eine homogen geladene, rotierende Kreisscheibe mit Radius R. Gesamtladung Q und Winkelgeschwindigkeit ω.

a) Berechnen Sie das magnetische Dipolmoment und das magnetische Dipolfeld der Kreisscheibe. Überlegen Sie sich dazu zunächst die Ladungsdichte $\hat{\rho}(\vec{r})$.

b) Berechnen Sie exakt das magnetische Feld B auf der z-Achse.

Lösung

a) In dieser Aufgabe empfiehlt es sich, Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) zu verwenden. Die Ladungsdichte $\hat{\rho}$, die das Problem beschreibt, ist gegeben durch

$$\hat{\rho}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{Q}{\pi R^2}}_{=\sigma} \delta(z)\Theta(R-\rho) \tag{20}$$

Das Dipolmoment berechnet sich über

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\hat{\rho}(\vec{r})\,\vec{r}\times\vec{v}, \tag{21}$$

wobei

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}. \tag{22}$$

Hierin ist $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_z$ die Winkelgeschwindigkeit und $\vec{r} = \rho\hat{e}_\rho$ der Vektor, der auf die Ladungsverteilung zeigt. Wir setzen dies in Gleichung (21) ein und erhalten

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^\infty \mathrm{d}\rho\rho\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}z\sigma\delta(z)\Theta(R-\rho)(\rho\hat{e}_\rho\times\omega\hat{e}_z\times\rho\hat{e}_\rho) \tag{23}$$

$$= \frac{1}{2}\sigma 2\pi\omega\int_0^\infty \mathrm{d}\rho\rho^3\Theta(R-\rho)\hat{e}_z \tag{24}$$

$$= \frac{\sigma R^4\omega\pi}{4}\hat{e}_z = \frac{QR^2\omega}{4}\hat{e}_z \tag{25}$$

Im Folgenden soll das Dipolfeld berechnet werden. Hierfür bestimmen wir die Dipolnäherung des Vektorpotentials

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\hat{r}}{|\vec{r}|^2} \tag{26}$$

$$= \frac{\mu_0\sigma\rho R^4\omega}{16(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{e_\varphi} \tag{27}$$

$$\tag{28}$$

Über das Vektorpotential $\vec{A}^{(1)}(\vec{r})$ lässt sich das Dipolfeld berechnen. Es ergibt sich

$$\vec{B}^{(1)}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\hat{r}(\hat{r}\cdot\vec{m})-\vec{m}}{r^3}\right] \tag{29}$$

$$= \frac{\mu_0\sigma R^4\omega}{16}\left(\frac{3z\rho}{(\rho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\hat{e}_\rho + \frac{2z^2-\rho^2}{(\rho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\hat{e}_z\right) \tag{30}$$

Für das Dipolfeld entlang der z-Achse ($\rho = 0$) erhält man

$$\vec{B}^{(1)}(z) = \frac{\mu_0\sigma R^4\omega}{8|z|^3}\hat{e}_z \tag{31}$$

b) Hier wird das Biot-Savart-Gesetz verwendet

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r'}) \times (z\hat{e}_z - \hat{e}_\rho \rho')}{\left|z\hat{e}_z - \hat{e}_\rho \rho'\right|^3} \tag{32}$$

Alle zugehörigen Größen sind bekannt. Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\vec{B}(z) &= \frac{\sigma\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \int_0^{\infty} \mathrm{d}\rho' \rho' \frac{\delta(z')\Theta(R-\rho')\omega\rho'}{(z^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} \cos(\varphi)z \\ \sin(\varphi)z \\ \rho' \end{pmatrix} && (33) \\
&= \frac{\sigma\mu_0\omega}{2} \int_0^{\infty} \mathrm{d}\rho' \frac{\Theta(R-\rho')\rho'^3}{(z^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{e}_z && (34) \\
&= \frac{\sigma\mu_0\omega}{2} \frac{\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right)^2}{\sqrt{R^2+z^2}} \hat{e}_z && (35) \\
&= \frac{\sigma\mu_0\omega}{2} \left(\frac{2z^2}{\sqrt{R^2+z^2}} + \frac{R^2}{\sqrt{R^2+z^2}} - 2|z| \right) \hat{e}_z && (36)
\end{aligned}$$

Für große Abstände, $z \gg R$, erhalten wir

$$\vec{B}(z) \approx \frac{\mu_0 \sigma R^4 \omega}{8|z|^3} \hat{e}_z \tag{37}$$

was dem zuvor berechneten Dipolfeld entlang der z-Achse entspricht.

Aufgabe 7 (Photonenrückstoß)

Es gibt Pläne, Raumschiffe auf dem Weg zu weit entfernten Himmelskörpern durch Photonenrückstoß auf hohe Geschwindigkeiten zu beschleunigen. Wie groß muss die Intensität des Lichtes einer “Lampe“ mit $100\,\mathrm{cm}^2$ Fläche sein, die Licht nach hinten abstrahlt, damit eine Masse von $1000\,\mathrm{kg}$ eine Beschleunigung von $10 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ erfährt?

Lösung

Der Photonenrückstoß pro Sekunde ist

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = F_R = \epsilon_0 E^2 \cdot A = m \cdot a. \tag{38}$$

Wegen $I = \epsilon_0 c E^2$ folgt

$$I = \frac{c \cdot m \cdot a}{A}. \tag{39}$$

Soll eine Beschleunigung von $a = 10^{-5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ für eine Masse $m = 10^3\,\mathrm{kg}$ bei einer Fläche $A = 10^{-2}\,\mathrm{m}^2$ erreicht werden, so muss

$$I = 3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \tag{40}$$

sein. Die Lichtleistung der Lampe müsste dann

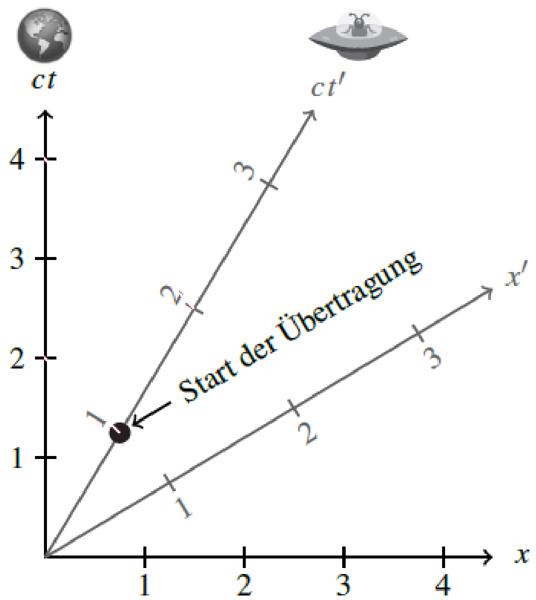
$$P_{\text{Licht}} = I \cdot A = 3 \cdot 10^6\,\mathrm{W} \tag{41}$$

sein.

Aufgabe 8 (Minkowski Diagramm)

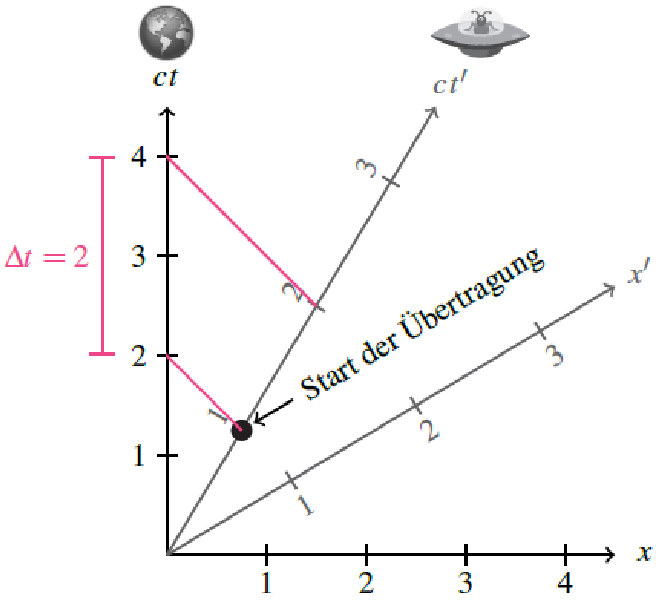
Eine Raumschiff entfernt sich mit der Geschwindigkeit $\frac{3}{5}c$ von der Erde. Der Kapitän des Schiffs berichtet über seine Reise in einer Fernsehübertragung, die auf seiner Borduhr zum Zeitpunkt t'= 1 beginnt und eine Stunde dauert.

a) Tragen Sie das geschilderte Szenario in das folgende Minkowski-Diagramm ein:



b) Entnehmen Sie dem Diagramm, wie viel Zeit der Fernsehsender einplanen muss, damit die Sendung komplett übertragen werden kann.

Lösung



a)

b) Die Übertragung dauert 2 Stunden.