Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs

Experimentalphysik 2

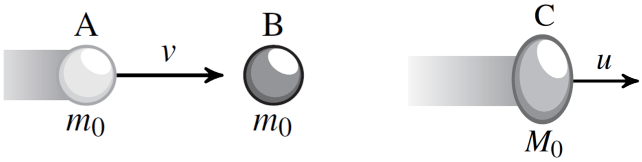
SS 2018

Lösung Aufgabenblatt 4

Hagen Übele
Maximilian Ries

Relativistischer, inelastischer Stoß

In dieser Aufgabe wollen wir uns mit dem inelastischen Stoß auseinandersetzen, bei dem die kollidierenden Objekte nicht mehr länger wie Billardkugeln voneinander abprallen, sondern wachsartig miteinander verschmelzen. Das folgende Bild zeigt das Ergebnis eines solchen Zusammenstoßes:



Wir wollen in dieser Aufgabe der Frage nachgehen, wie groß die Ruhemasse M_0 der neu geformten Kugel C ist, wenn A und B beide vor der Kollision die Ruhemasse m_0 besaßen.

a) Begründen Sie, warum die Geschwindigkeit u, mit der sich die neu geformte Kugel bewegt, der Geschwindigkeit v des Mittelsystems entspricht.

b) Stellen Sie für das gezeigte Szenario die Impulserhaltungsgleichung auf. Bedenken Sie, dass die vorkommenden Geschwindigkeiten relativistisch anzunehmen sind.

c) Bestimmen Sie die Ruhemasse M_0, nutzen Sie folgende Beziehung:

$$\frac{\gamma_v \cdot \beta_v}{\gamma_u^2 \beta_u} = 2 \tag{1}$$

Lösung

a) Betrachten wir das Szenario aus der Sicht des Mittelsystems, so rasen A und B mit der gleichen Geschwindigkeit aufeinander zu. Da die beiden Kugeln die gleiche Ruhemasse aufweisen, bleibt die neu geformte Kugel C am Platz. Das Mittelsystem ist somit das Ruhesystem von C, so dass sich C aus der Sicht von A oder M mit der Geschwindigkeit des Mittelsystems bewegen muss.

b) Die Einzelimpulse sind:

$$p_A = \gamma_v m_0 v \tag{2}$$
$$p_B = 0 \tag{3}$$
$$p_C = \gamma_u M_0 u \tag{4}$$
$$\tag{5}$$

Nach dem Prinzip der Impulserhaltung gilt dann:

$$\gamma_v m_0 v = \gamma_u M_0 u \tag{6}$$

c) Aus der Impulserhaltungsgleichung folgt:

$$M_0 = \frac{\gamma_v m_0 v}{\gamma_u u} = \gamma_u \frac{\gamma_v v}{\gamma_u^2 u} m_0 = \gamma_u \frac{\gamma_v \beta_v}{\gamma_u^2 \beta_u} m_0 \tag{7}$$

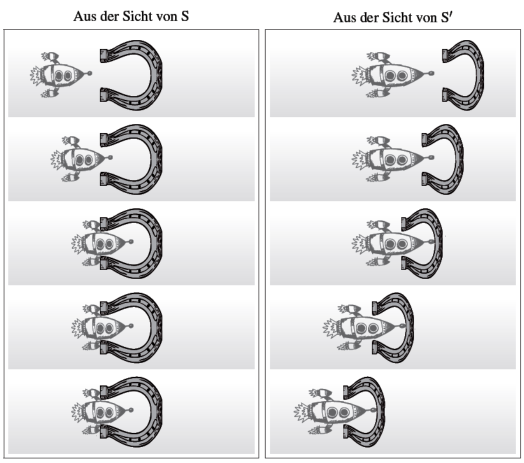
mit dem Tipp folgt nun sofort:

$$M_0 = 2\gamma_u m_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-\beta_u^2}} \tag{8}$$

Längenkontraktion

Diese Aufgabe soll zum reflektieren über die Auswirkungen der Längenkontraktion anregen. Die Lösung ist angegeben.

In dieser Aufgabe betrachten wir eine Rakete, die mit hoher Geschwindigkeit auf ein Hufeisen prallt. Wir gehen davon aus, dass die Raketenhülle aus so festem Stahl gefertigt ist, dass sie bei der Kollision nicht auseinanderbricht. Die folgenden Momentaufnahmen machen deutlich, wie sich die Kollision aus dem Ruhesystem des Hufeisens (System S) und dem Ruhesystem der Rakete (System S') darstellt:



Für einen Beobachter in S ist die Rakete aufgrund der Längenkontraktion in der Bewegungsrichtung kürzer, so dass die Triebwerke mit den Enden des Hufeisens kollidieren. Hierdurch wird die Rakete gestoppt, und die Spitze bleibt intakt. In S' scheinen sich die Geschehnisse ganz anders abzuspielen. Dort ist das Hufeisen in der Bewegungsrichtung verkürzt, so dass die Spitze der Rakete mit dem Hufeisen kollidiert und nicht der Antrieb.

Da beide Szenarien nicht gleichzeitig eintreten können, muss mindestens eines der beiden falsch sein. Lösen Sie den entstandenen Widerspruch auf.

Lösung

Die paradoxe erscheinende Situation wird dadurch hervorgerufen, dass ein kausaler Zusammenhang zwischen zwei raumartigen Ereignissen hergestellt wird. Dass die Spitze der Rakete unbeschädigt bleibt, basiert auf der unausgesprochenen Annahme, dass die Rakete ein perfekter starrer Körper ist und die Kollision der Triebwerke deshalb zu einem sofortigen Stillstand der Spitze führt. Einen solchen starren Körper kann es nicht geben, da sich die Bremswirkung dann unendlich schnell und damit insbesondere schneller als das Licht ausbreiten würde. Die authentischere Interpretation ist, dass das Raumschiff in das Hufeisen hineinfließen würde und dadurch länger werden (wobei wir uns dies auch hier nicht zu bildlich vorstellen sollten). Sind die Tiefe des Hufeisens und des Raumschiffs in etwa gleich groß, so würden sowohl die Triebwerke als auch die Spitze der Rakete kollidieren.

Masse/Energie Relativität

Die im Magnetfeld der Erde gespeicherte Energie liegt in der Größenordnung von einem Exa-Joule (1EJ).

Wie viel trägt das Feld zur Masse der Erde bei?

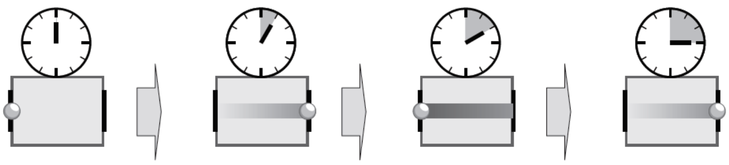
Lösung

$$m = \frac{E}{c^2} \approx \frac{1\mathrm{EJ}}{(3 \cdot 10^8 \mathrm{m/s})^2} = \frac{1 \cdot 10^1 8\mathrm{J}}{9 \cdot 10^1 6\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2} = 11,11\mathrm{kg} \tag{9}$$

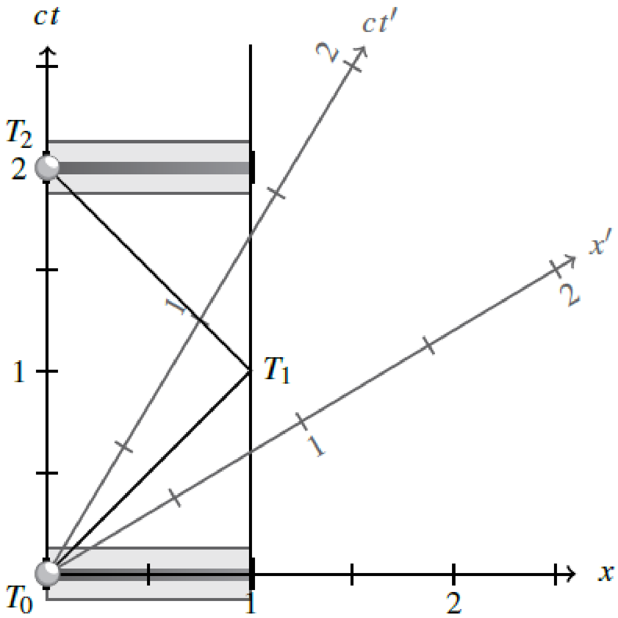
Fazit: Das Magnetfeld wiegt rund 11kg.

Longitudinale Lichtuhr

In dieser Aufgabe betrachten wir eine longitudinale Lichtuhr. Diese Uhr ist so konzipiert, dass sie jedes Mal, wenn das Photon an einem der beiden Spiegel reflektiert wird, den Zeiger auf dem Zifferblatt einen Schritt weiterbewegt:



In dem folgenden Minkowski-Diagramm sind die ersten beiden Schläge einer solchen Uhr grafisch dargestellt. Die eingezeichneten Ereignisse T1 und T2 geben an, wann der Zeiger auf die nächste Ziffer springt:



a) Übersetzen Sie die Ereignisse T_0, T_1 und T_2 in das Symsten S', das sich mit der Geschwindigkeit $v = \frac{3}{5}c$ in Richtung der positiven x-Achse bewegt.

b) Wie groß sind die Zeitintervalle zwischen den Uhrzeigersprüngen aus der Sicht von S'?

c) Handelt es sich um eine sinnvolle Uhr für relativistisch Reisende?

Lösung

a)

$$T'_0 = (ct'_0, x'_0) = (0, 0) \tag{10}$$
$$T'_1 = (ct'_1, x'_1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \tag{11}$$
$$T'_2 = (ct'_2, x'_2) = (\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}) \tag{12}$$
$$\tag{13}$$

b) Zwischen T_0 und T_1 bzw. T_1 und T_2 vergehen die Zeiten:

$$ct'_1 - ct'_0 = \frac{1}{2} \tag{14}$$
$$ct'_2 - ct'_1 = 2 \tag{15}$$
$$\tag{16}$$

c) Die Ereignisse, die das Weiterschalten des Zeigers bewirken, finden an zwei verschiedenen Stellen der Uhr statt. Die Relativität der Gleichzeitigkeit sorgt dafür, dass sich die Zeitintervalle aus der Sicht eines bewegten Beobachters gegeneinander verschieben. Als Uhr taugt eine solche Konstruktion daher nicht!

Wellengleichung des B-Feld

Zeigen Sie, dass aus den Maxwellgleichungen eine zu

$$\Delta E = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \tag{17}$$

analoge Wellengleichung für das magnetische Feld $\vec{B}$ folgt.

Lösung

Aus rot $\vec{B} = \epsilon_0\mu_0 \partial E/\partial t$ folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{B} &= \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\,\vec{E}) && (18)\\
&= -\epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} && (19)\\
\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{B} &= \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\vec{B}) - \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\vec{B} && (20)\\
&= -\Delta\vec{B} && (21)\\
& && (22)
\end{aligned}$$

weil div $\vec{B} = 0$ ist. Es folgt

$$\Delta\vec{B} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \tag{23}$$

Zirkulare Polarisation

Zeigen Sie, dass jede lineare polarisierte Welle als Linearkombination aus zwei zirkular polarisierten Wellen mit entgegengesetztem Drehsinn beschrieben werden kann.

Lösung

Die Darstellung einer zirkular-polarisierten Welle ist:

$$\begin{aligned}
&\vec{E} = \vec{A} \cdot e^{i(\omega t - kz)} \quad \text{mit} \quad \vec{A} = A_0(\hat{x} \pm i\hat{y}) && (24)\\
&\sigma^+\text{-Licht:}\vec{A} = A_0(\hat{x} + i\hat{y}) && (25)\\
&\sigma^-\text{-Licht:}\vec{A} = A_0(\hat{x} - i\hat{y}) && (26)\\
&E^+ + E^- = 2A_0\hat{x}e^{i(\omega t - kz)} && (27)\\
& && (28)
\end{aligned}$$

Die ist eine in x-Richtung linear polarisierte Welle.

Lichtmühle

Eine Lichtmühle im Vakuum mit vier Flügeln aus absorbierenden oder reflektierenden Flächen à $2 \times 2\,\mathrm{cm}^2$, deren Mittelpunkt $2\,\mathrm{cm}$ von der Drehachse entfernt ist, wird von einem parallelen Lichtbündel mit Querschnitt $6 \times 6\,\mathrm{cm}^2$ und einer Intensität $I = 1 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ bestrahlt. Wie groß ist das wirkende Drehmoment?

Lösung

Bei der in Abbildung 1 gezeigten, willkürlich gewählten, Stellung der Lichtmühle bildet das einfallende, parallele Licht den Winkel α gegen die Flächen 1 und 3 und den Winkel $\beta = 90° - \alpha$ gegen die Flächen 2 und 4. Der Strahlungsdruck auf die reflektierenden Flächen 1 und 2 bewirkt ein Drehmoment im Uhrzeigersinn, der Druck auf die absorbierenden Flächen 3 und 4 ein rücktreibendes Drehmoment. Die Flächen sind $A_i = a^2$. Hat das Licht die Intensität I, so wird auf das Flächenelement $\mathrm{d}A_1 = a \cdot \mathrm{d}s$ die Kraft

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \frac{2I}{c} a \cdot \mathrm{d}s \cdot \sin\alpha \cdot \hat{\mathbf{e_x}} \tag{29}$$

ausgeübt, welche das Drehmoment $\mathrm{d}\mathbf{D_1} = \mathrm{d}\mathbf{F_1} \times s$ um die z-Achse bewirkt. Mit $y = s \cdot \sin\alpha$ folgt für den Betrag:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}D_1 = \mathrm{d}F_1 \cdot s \cdot \sin\alpha &= \frac{2I}{c} a \sin^2\alpha \cdot s\,\mathrm{d}s && (30)\\
&= \frac{2I}{c} ay \cdot \mathrm{d}y && (31)\\
\Rightarrow D_1 &= \frac{2I}{c} \cdot a \cdot \int_{b\cdot\sin\alpha}^{(b+a)\sin\alpha} y\,\mathrm{d}y && (32)\\
&= \frac{I}{c} a \sin^2\alpha (a^2 + 2ba). && (33)
\end{aligned}$$

Das Drehmoment auf die Fläche 2 ist entsprechend

$$D_2 = \frac{2I}{c} a \int_{y_1}^{y_2} y\,\mathrm{d}y = \frac{I}{c} a \left[y_2^2 - y_1^2\right] \tag{34}$$

mit $y = s \cdot \cos\alpha$. Die Fläche 2 wird teilweise von der Fläche 1 abgeschattet, sodass nur ein Teil beleuchtet wird. Für $\alpha \leq 45°$ ist dies der Teil von $y_1 = (a + b) \cdot \cos\beta$ bis $y_2 = (a + b) \cdot \sin\beta$, d.h. $y_1 = (a + b) \cdot \sin\alpha$, $y_2 = (a + b) \cdot \cos\alpha$. Es folgt

$$\begin{aligned}
D_2 &= \frac{I}{c} a(a + b)^2 \left[\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right] && (35)\\
&= \frac{I}{c} a(a + b)^2 \left[1 - 2\cos^2\alpha\right]. && (36)
\end{aligned}$$

Für $\alpha \geq 45°$ ist dies der Teil von $y_1 = b \cdot \cos\alpha$ bis $y_2 = b \cdot \sin\alpha$

$$\Rightarrow D_2(\alpha \geq 45°) = \frac{I}{c} ab^2 [1 - 2\cos^2\alpha]. \tag{37}$$

Das Drehmoment D_3 erhält man analog zu D_1, wenn man α durch $\beta = 90° - \alpha$ ersetzt und berücksichtigt, dass bei der Absorption der Impulsübertrag nur halb so groß ist.

$$\Rightarrow D_3 = -\frac{I}{2c} a \cdot \cos^2\alpha \left[a^2 + 2ba\right], \tag{38}$$

$$D_4 = -\frac{I}{2c} a(a+b)^2 (1 - 2\sin^2\alpha) \tag{39}$$

$$\text{für} \quad \alpha \leq 45°, \tag{40}$$

$$D_4 = \frac{I}{2c} ab^2 (1 - 2\sin^2\alpha) \text{ für } \alpha \geq 45°. \tag{41}$$

Das gesamte Drehmoment ist $D = D_1 + D_2 + D_3 + D_4$. Mit $b = 1\,\text{cm}$ und $a = 2\,\text{cm}$, $I = 10^4\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ erhält man:

$$D_1 = \frac{I}{c} \cdot \sin^2\alpha \cdot 16 \cdot 10^{-6}\,\text{N m} \tag{42}$$

$$= \sin^2\alpha \cdot 5{,}3 \cdot 10^{-10}\,\text{N m}, \tag{43}$$

$$D_2 = 6 \cdot 10^{-10} \left[\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right], \tag{44}$$

$$D_3 = -2,67 \cdot 10^{-10} \cos^2\alpha, \tag{45}$$

$$D_4 = -3 \cdot 10^{-10} \left[\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right], \tag{46}$$

$$\Rightarrow D = 14,3 \cdot 10^{-10} \sin^2\alpha - 11,67 \cdot 10^{-10} \cos^2\alpha \;\text{ für }\; \alpha \leq 45°. \tag{47}$$

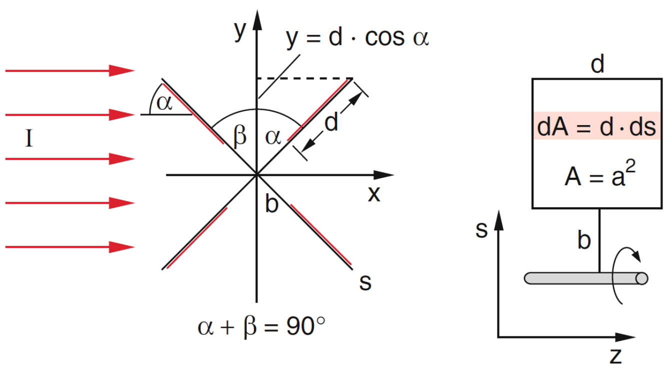


Abbildung 1: Betrachtete Stellung der Lichtmühle