Ferienkurs Analysis 2 für Physiker **Name:** ______________________
Sommersemester 2018
Probeklausur **Matrikelnummer:** ______________________
21.09.18
Prüfungsdauer: 90 Minuten

Die Klausur enthält **13** Seiten (einschließlich dieses Deckblattes) sowie **8** Fragen.
Sie können insgesamt **69** Punkte erreichen.
Einzig erlaubtes Hilfsmittel ist ein, wenn notwendig beidseitig, handbeschriebenes DIN-A4 Blatt. Insbesondere dürfen keine Fachbücher & Skripte sowie elektronischen Hilfsmittel jeder Art (z.B. Handy, Taschenrechner, Laptop,...) verwendet werden.

Bewertungstabelle

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte:	9	9	8	4	7	6	12	14	69
Ergebnis:									

Note: __________

Viel Erfolg!

---

1. $\boxed{\textit{9 Punkte}}$ Sei $\Phi : Q \to \mathbb{R}^2$,

$$\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} \ln\left(\frac{x}{y}\right) \\ 2\sqrt{xy} \end{pmatrix},$$

wobei $Q := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0 \text{ und } y > 0\}$.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von Φ:

Lösung:

$$D\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x} & -\dfrac{1}{y} \\ \sqrt{\dfrac{y}{x}} & \sqrt{\dfrac{x}{y}} \end{pmatrix}. \qquad \textbf{[4]}$$

(b) Kreuzen Sie die richtigen Antworten an:

- ☒ Φ ist stetig. **[1]**
- ☒ Φ ist stetig partiell differenzierbar. **[1]**
- ☒ $D\Phi(x,y)$ ist invertierbar. **[1]**
- ☐ $D\Phi(x,y)$ is symmetrisch.
- ☒ Φ ist ein lokaler Diffeomorphismus. **[1]**
- ☐ $\det D\Phi(x,y) = 0$.
- ☒ $\Phi(V)$ mit $V := \{(x,y) \in Q \,|\, x = y\}$ eine eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit. **[1]**
- ☐ $\Phi(V)$ mit $V := \{(x,y) \in Q \,|\, x = y\}$ eine eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit.

2. $\boxed{\textit{9 Punkte}}$ Gegeben sei die Kurve $\gamma : (0,1) \to \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1+t^2} \\ 3 \\ \sqrt{1+t^2} \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Bogenlänge von γ.

(b) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $\varphi : I \to (0,1)$ eine $\mathcal{C}^1$–Parametertransformation. Beweisen Sie, dass $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi$ die gleiche Bogenlänge wie γ hat.

Lösung: (a): Es gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ 0 \\ \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{pmatrix}. \qquad \textbf{[2]}$$

Also ist die gesuchte Länge

$$L \overset{\textbf{[1]}}{=} \int_0^1 |\gamma'(t)|\,dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \sqrt{2}\left[\sqrt{1+t^2}\right]_{t=0}^{t=1} \overset{\textbf{[2]}}{=} 2 - \sqrt{2}.$$

(b): Mit der Kettenregel gilt

$$\frac{d}{ds}\tilde{\gamma}(s) = \frac{d}{ds}\gamma(\varphi(s)) = \gamma'(\varphi(s))\varphi'(s). \qquad \textbf{[1]}$$

Mit der Substitution $t = \varphi(s)$ **[2]** folgt also

$$\tilde{L} = \int_I \left|\frac{d}{ds}\tilde{\gamma}(s)\right|\,ds = \int_0^1 |\gamma'(t)|\,dt. \qquad \textbf{[1]}$$

Zu beachten ist insbesondere, dass $\varphi(I) = (0,1)$, da φ eine $\mathcal{C}^1$–Parametertransformation ist.

3. $\boxed{\textit{8 Punkte}}$ Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $f(A) = \det A$.

   (a) Warum ist f überall differenzierbar?

   (b) Zeigen Sie, dass $f'_{\mathbb{1}}(H) = \operatorname{tr} H$ für alle $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
   Hinweise: 1. Sie dürfen benutzen, dass wenn $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ offen, differenzierbar ist in $A \in U$, dann
   $$f'_A(H) = \lim_{t\to 0} \frac{f(A+tH) - f(A)}{t}.$$
   2. Für das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt, dass
   $$p_A(\lambda) = \lambda^n + \operatorname{tr}(A)\lambda^{n-1} + c_{n-2}(A)\lambda^{n-2} + \cdots + c_1(A)\lambda + \det A$$
   für $c_1(A), \ldots, c_{n-1}(A) \in \mathbb{R}$.

   (c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Zeigen Sie, dass $f'_A(H) = \det(A)\operatorname{tr}(A^{-1}H)$.
   Hinweis: Führen Sie die Aufgabe auf den Teil (b) zurück.

Lösung: (a): Die Determinante ist ein Polynom in den Matrixeinträgen und damit überall (beliebig oft) differenzierbar. **[1]**
Erinnerung:
$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$
mit der Permutationsgruppe $S_n = \{\sigma : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\} \mid \sigma \text{ bijektiv}\}$.

(b): Mit (a) und dem Hinweis reicht es zu zeigen, dass
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbb{1}+tH) - f(\mathbb{1}) - tf'_{\mathbb{1}}(H)}{t} = 0. \qquad \textbf{[1]}$$
Dazu bemerken wir mit Hilfe des zweiten Teil des Hinweises
$$\begin{aligned}\frac{f(\mathbb{1}+tH) - f(\mathbb{1}) - f'_{\mathbb{1}}(H)}{t} &\overset{[2]}{=} \frac{t^n \det\left(\frac{1}{t}\mathbb{1} + H\right) - 1 - t\operatorname{tr} H}{t}\\ &\overset{[1]}{=} \frac{1 + t\operatorname{tr}(H) + \mathcal{O}(t^2) - 1 - t\operatorname{tr}(H)}{t}\\ &\to 0\end{aligned}$$
für $t \to 0$.

(c): Für $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ schreiben wir zunächst
$$f(B) = \det(B) = \det(AA^{-1}B) = \det(A)\det(A^{-1}B). \qquad \textbf{[1]}$$
Mit der Hilfsfunktion $g : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $g(B) = A^{-1}B$, gilt nun $f(B) = \det(A)f(g(B))$ und daher nach der Kettenregel
$$f'_B(H) = \det(A)f'_{g(B)}(A^{-1}H) \qquad \textbf{[1]},$$

sodass für $B = A$

$$f'_A(H) = \det(A) f'_{\mathbb{1}}(A^{-1}H) = \det(A)\operatorname{tr}(A^{-1}H) \qquad \textbf{[1]}$$

nach Teilaufgabe (b).

4. $\boxed{\textit{4 Punkte}}$ Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) := f(x, g(x)),$$

in Termen der (partiellen) Ableitungen von f und g. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Aus der Kettenregel **[1]** folgt

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}f(x, g(x)) = \overset{[1]}{\partial_1 f(x, g(x))} + \overset{[2]}{\partial_2 f(x, g(x))g'(x)},$$

wobei ∂_1 und ∂_2 die partiellen Ableitungen bezüglich der ersten bzw. zweiten Variablen von f sind.

5. $\boxed{\textit{7 Punkte}}$ Gegeben sei das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$,

$$v(x) = f(|x|)\frac{x}{|x|},$$

mit $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

(a) Bestimmen Sie die Rotation von v:

Lösung:

$$\operatorname{rot} v(x) = 0. \qquad \textbf{[1]}$$

(b) Ein Punktteilchen bewegt sich im Vektorfeld v mit konstanter Geschwindigkeit auf dem Kreis um $0 \in \mathbb{R}^2$ mit Radius 1. Bestimmen Sie das Arbeitsintegral für einen Kreisumlauf im mathematisch positiven Sinne. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Für eine konstante Geschwindigkeit $u \in \mathbb{R}_+$ ist der Weg parametrisiert durch $\gamma : [0, \frac{2\pi}{u}) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(ut) \\ \sin(ut) \end{pmatrix} \qquad \textbf{[1]}$$

und somit

$$\gamma'(t) = u \begin{pmatrix} -\sin(ut) \\ \cos(ut) \end{pmatrix}. \qquad \textbf{[1]}$$

Mit $v(\gamma(t)) \overset{\textbf{[1]}}{=} f(1)\gamma(t)$ und $\gamma(t) \cdot \gamma'(t) = 0$ für alle $t \in [0, \frac{2\pi}{u})$ folgt schließlich, dass

$$A \overset{\textbf{[1]}}{=} \int_0^{2\pi/u} v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \overset{\textbf{[2]}}{=} 0.$$

Alternative: Sei F eine Stammfunktion von f **[1]**

(existiert, da f differenzierbar ist). **[1]**
Dann ist v konservativ und $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\Phi(x) = F(|x|)$ ist ein Potential für v,**[2]**
d.h. $\nabla\Phi = v$. **[1]**
Das Arbeitsintegral entlang jeder geschlossenen Kurve verschwindet. **[1]**

6. $\boxed{\textit{6 Punkte}}$ Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine in $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ differenzierbare Funktion mit $f(a) = 2$. Die Richtungsableitung von f in a lautet:

$$D_v f(a) = \begin{cases} 3 & \text{für } v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ 1 & \text{für } v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom erster Ordnung von f um a. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Sei $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Das Taylorpolynom erster Ordnung von f um $a \in \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$T_1 f(x; a) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a). \qquad \textbf{[1]}$$

Da a und $f(a)$ bekannt sind, bleibt nur $\nabla f(a)$ zu bestimmen. Für beliebige Vektoren $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$D_v f(a) = v \cdot \nabla f(a) = v_1 w_1 + v_2 w_2, \qquad \textbf{[1]}$$

wobei $\nabla f(a) =: (w_1, w_2)$. Aus der Gleichung für $v = (0, 1)$ folgt $w_2 \overset{[1]}{=} 3$ und aus der Gleichung für $v = (1, -1)$ dann $w_1 \overset{[1]}{=} 4$. Das gesuchte Taylorpolynom lautet

$$T_1 f(x; a) = 2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} = 3 + 4x_1 + 3x_2. \qquad \textbf{[2]}$$

7. $\boxed{\textit{12 Punkte}}$ Bestimmen Sie die lokalen Minima und Maxima der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$$

auf:

(a) der offenen Einheitskreisscheibe $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$.

(b) dem Rand ∂E der offenen Einheitskreisscheibe.

Lösung: (a): Da E offen ist, reicht es die kritischen Punkte des Gradienten $\nabla f(x, y)$ zu untersuchen. Es sind

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 1 \\ 4y \end{pmatrix} \overset{[1]}{=} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x, y) \overset{[1]}{=} \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

Die Hessematrix von f ist

$$H_f(x, y) \overset{[1]}{=} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

und somit für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ positiv definit, **[1]**
insbesondere für $(x, y) = (1/2, 0)$
$\Longrightarrow (1/2, 0)$ ist ein lokales Minimum von f mit $f(1/2, 0) \overset{[1]}{=} -1/4$.

(b): Es gilt

$$\partial E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}.$$

∂E kann durch $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ parametrisiert werden. Einsetzen in $f(x, y)$ ergibt

$$g(t) := 2\sin(t)\cos(t) + \sin(t) = \sin(t)(2\cos(t) + 1) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \sin(t) = 0 \ \vee \ \cos(t) = -\frac{1}{2}. \qquad \textbf{[1]}$$

Dies liefert vier Punkte: $(0, 1)$ für $t = 0$, $f(1, 0) = 0$; $(-1, 0)$ für $t = \pi$, $f(-1, 0) = 2$; $(-\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{4}})$ für $t = \frac{2\pi}{3}$ und $(-\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{4}})$ für $t = \frac{4\pi}{3}$, $f(-\frac{1}{2}, \pm\sqrt{\frac{3}{4}}) = \frac{9}{4}$. Aus den Werten von f an den kritischen Punkten folgt, dass die ersten zwei lokale Minima und die letzteren zwei lokale Maxima sind.

[1] pro Punkt mit Maximum/Minimum

Alternative 1: Man beachte, dass $f(x, y)$ symmetrisch unter $y \mapsto -y$ ist. **[1]**
Wir beschränken uns also oBdA auf $y \geq 0$. Einsetzen von $y^2 = 1 - x^2$ in $f(x, y)$ ergibt eine Funktion $h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) := f(x, \sqrt{1 - x^2}) = x^2 + 2(1 - x^2) - x = 2 - x^2 - x. \qquad \textbf{[1]}$$

Aus $h'(x) = -2x - 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$ und $h''(x) = -2 < 0$ **[1]** sind $(-\frac{1}{2}, \pm\sqrt{1 - \frac{1}{4}}) = (-\frac{1}{2}, \pm\sqrt{\frac{3}{4}})$ lokale Maxima mit $f(-\frac{1}{2}, \pm\sqrt{\frac{3}{4}}) = \frac{9}{4}$. Die Funktion h ist konkav ($h'' < 0$), auf dem kompakten Intervall $I := [-1, 1]$ definiert, und nimmt ein Maximum im Inneren von I (bei $-\frac{1}{2}$) an. Also hat h lokale Minima am Rand. Diese entsprechen $(-1, 0)$ mit $f(-1, 0) = 2$ und $(1, 0)$ mit $f(1, 0) = 0$.

[1] pro Punkt mit Maximum/Minimum

Alternative 2: Die Methode der Lagrange–Multiplikatoren kann auch wie folgt eingesetzt werden. Die Nebenbedingung lautet $k(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. **[1]**
Gesucht sind also die kritischen Punkte von $f(x, y) - \lambda k(x, y)$, d.h. (x, y) und λ so, dass

$$2x - 1 + 2\lambda x = 0 \tag{1}$$

$$4y + 2\lambda y = 0 \qquad \textbf{[1]} \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{3}$$

Aus (2) folgt $y = 0$ oder $\lambda = -2$. **[1]**
Wenn $y = 0$, dann folgt aus (3) $x = \pm 1$. Wenn $y \neq 0$ und $\lambda = -2$ folgt aus (1) $x = -\frac{1}{2}$ und dann aus (3) $y = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$. Aus den Werten von f an den jeweiligen Punkten sind die ersteren zwei lokale Minima und die letzteren zwei lokale Maxima.

[1] pro Punkt mit Maximum/Minimum

8. $\boxed{\textit{14 Punkte}}$ Gegeben sei die folgende Differentialgleichung

$$x'(t) - x(t)\cos(t) = f(t)$$

mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung für

(a) $f(t) = 0$.

(b) $f(t) = \cos(t)$.

Zeichnen Sie ferner im Fall (a) das zugehörige Richtungsfeld der Differentialgleichung und geben Sie ein erstes Integral an.

Lösung: (a): Die Differentialgleichung lässt sich durch Trennung der Variablen lösen. Es gilt

$$\begin{aligned} x'(t) = x(t)\cos(t) \quad &\iff \quad \frac{x'(t)}{x(t)} = \cos(t) && \textbf{[1]} \\ &\iff \quad \int \frac{x'(t)}{x(t)}\,dt = \int \cos(t)\,dt \\ &\iff \quad \ln x(t) = \sin(t) + c && \textbf{[1]} \qquad (4) \\ &\iff \quad x(t) = Ce^{\sin(t)}, && \textbf{[1]} \end{aligned}$$

für $C = e^c \in \mathbb{C}$. Die allgemeine reelle Lösung ist durch die Einschränkung $C \in \mathbb{R}$ gegeben. **[1]**

(b): Die inhomogene Differentialgleichung hat die partikuläre Lösung $x_p(t) = -1$.**[3]** Eine allgemeine Lösung erfolgt als Summe der partikulären Lösung und der allgemeinen Läsung der homogenen Gleichung aus Teilaufgabe (a). D.h.

$$x(t) = Ce^{\sin(t)} - 1, \quad C \in \mathbb{R}. \qquad \textbf{[1]}$$

Alternative 1: Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} x'(t) = (1 + x(t))\cos(t) \quad &\iff \quad \frac{x'(t)}{1 + x(t)} = \cos(t) && \textbf{[1]} \\ &\iff \quad \int \frac{x'(t)}{1 + x(t)}\,dt = \int \cos(t)\,dt \\ &\iff \quad \ln(1 + x(t)) = \sin(t) + c && \textbf{[1]} \\ &\iff \quad x(t) = Ce^{\sin(t)} - 1, \quad C \in \mathbb{R}. && \textbf{[2]} \end{aligned}$$

Alternative 2: Variation der Konstanten: Ansatz für eine partikuläre Lösung

$$x_p(t) \overset{\textbf{[1]}}{=} c(t)e^{\sin(t)}.$$

Einsetzen in die inhomogene Gleichung ergibt

$$c'(t) \overset{[1]}{=} e^{-\sin(t)}\cos(t) \quad \Longrightarrow \quad c(t) = -e^{-\sin(t)},$$

und somit ist $x_p(t) \overset{[1]}{=} -1$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung ist $x(t) = Ce^{\sin(t)} - 1$, $C \in \mathbb{R}$. **[1]**

Aus der Gleichung (4) ließt man sofort das erste Integral

$$E(t, x(t)) = \ln(x(t)) - \sin(t) \qquad \textbf{[2]}$$

ab. Man prüft sofort, dass die in (a) gefundenen Lösungen entlang der Höhenlinien der Funktion E konstant sind.

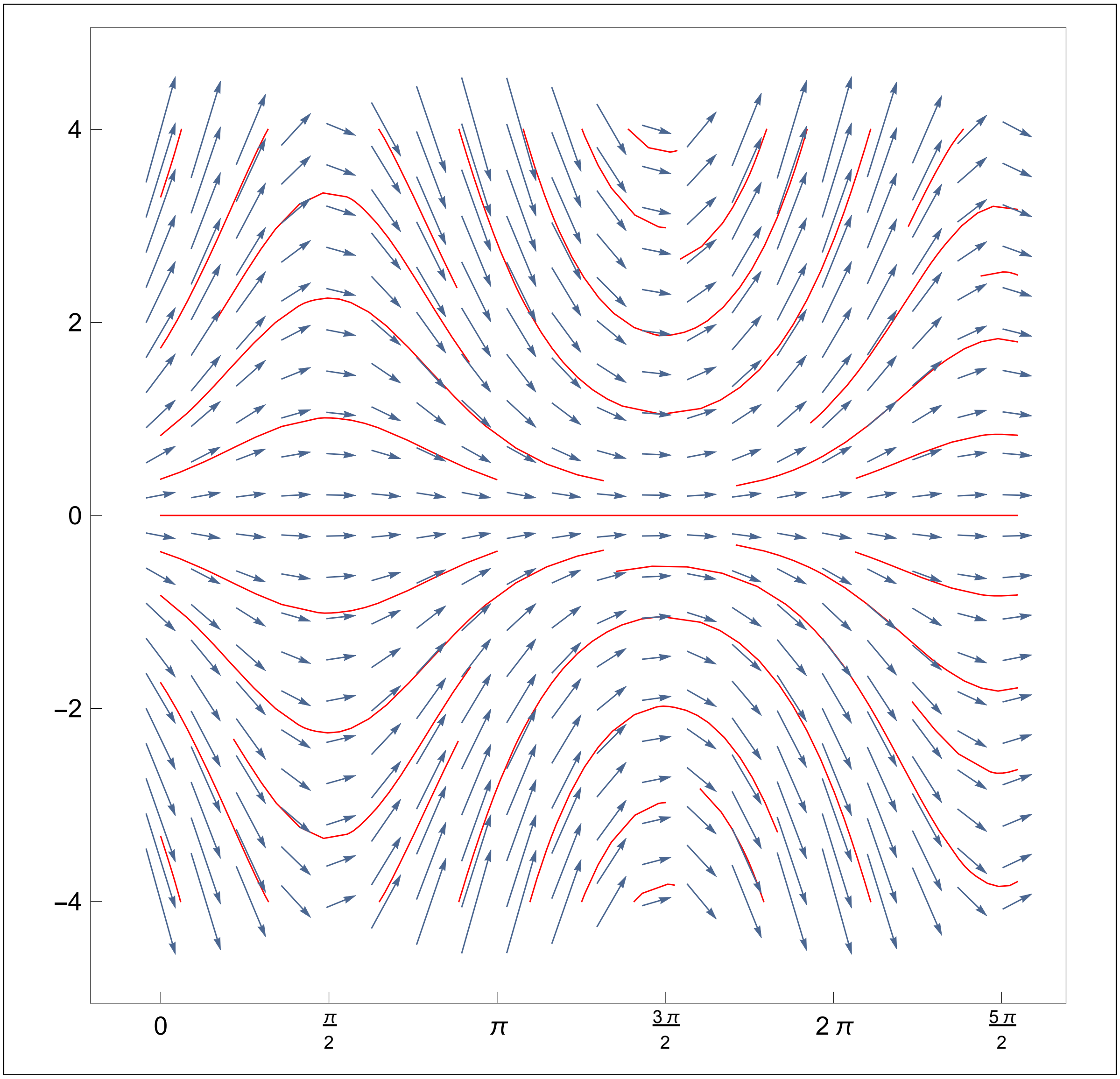
Für das Richtungsfeld schreiben wir

$$x'(t) = F(t, x(t))$$

mit $F(t, x) = x\cos(t)$. Das Richtungsfeld ist also durch

$$v(t, x) = \begin{pmatrix} 1 \\ F(t, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x\cos(t) \end{pmatrix}$$

gegeben. Damit erhält man folgende Skizze: **[4]**



Wie versprochen noch der Mathematica–Code zur obigen Abbildung:

```
plt = Show[VectorPlot[{1, x Cos[t]}, {t, 0, 8}, {x, −4, 4},
StreamPoints −> Coarse, StreamStyle −> Red, StreamScale −> None,
VectorPoints −> 20, VectorScale −> {0.1, 0.2, Automatic}],
PlotRange −> {{−0.2, 8}, Automatic}]
```