Ferienkurs Analysis 2 für Physiker
Sommersemester 2018
Probeklausur
21.09.18
Prüfungsdauer: 90 Minuten

Name: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Die Klausur enthält **9** Seiten (einschließlich dieses Deckblattes) sowie **8** Fragen.
Sie können insgesamt **69** Punkte erreichen.
Einzig erlaubtes Hilfsmittel ist ein, wenn notwendig beidseitig, handbeschriebenes DIN-A4 Blatt. Insbesondere dürfen keine Fachbücher & Skripte sowie elektronischen Hilfsmittel jeder Art (z.B. Handy, Taschenrechner, Laptop,...) verwendet werden.

Bewertungstabelle

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte:	9	9	8	4	7	6	12	14	69
Ergebnis:									

Note: __________

Viel Erfolg!

1. $\boxed{\textit{9 Punkte}}$ Sei $\Phi : Q \to \mathbb{R}^2$,

$$\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} \ln\left(\frac{x}{y}\right) \\ 2\sqrt{xy} \end{pmatrix},$$

wobei $Q := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0 \text{ und } y > 0\}$.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von Φ:

(b) Kreuzen Sie die richtigen Antworten an:

- ☐ Φ ist stetig.
- ☐ Φ ist stetig partiell differenzierbar.
- ☐ $D\Phi(x,y)$ ist invertierbar.
- ☐ $D\Phi(x,y)$ is symmetrisch.
- ☐ Φ ist ein lokaler Diffeomorphismus.
- ☐ $\det D\Phi(x,y) = 0$.
- ☐ $\Phi(V)$ mit $V := \{(x,y) \in Q \,|\, x = y\}$ eine eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit.
- ☐ $\Phi(V)$ mit $V := \{(x,y) \in Q \,|\, x = y\}$ eine eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit.

2. $\boxed{\textit{9 Punkte}}$ Gegeben sei die Kurve $\gamma : (0,1) \to \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1+t^2} \\ 3 \\ \sqrt{1+t^2} \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Bogenlänge von γ.

(b) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $\varphi : I \to (0,1)$ eine $\mathcal{C}^1$–Parametertransformation. Beweisen Sie, dass $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi$ die gleiche Bogenlänge wie γ hat.

3. $\boxed{\textit{8 Punkte}}$ Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $f(A) = \det A$.

(a) Warum ist f überall differenzierbar?

(b) Zeigen Sie, dass $f'_{\mathbb{1}}(H) = \operatorname{tr} H$ für alle $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Hinweise: 1. Sie dürfen benutzen, dass wenn $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ offen, differenzierbar ist in $A \in U$, dann

$$f'_A(H) = \lim_{t\to 0} \frac{f(A+tH) - f(A)}{t}.$$

2. Für das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt, dass

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + \operatorname{tr}(A)\lambda^{n-1} + c_{n-2}(A)\lambda^{n-2} + \cdots + c_1(A)\lambda + \det A$$

für $c_1(A), \ldots, c_{n-1}(A) \in \mathbb{R}$.

(c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Zeigen Sie, dass $f'_A(H) = \det(A)\operatorname{tr}(A^{-1}H)$.
Hinweis: Führen Sie die Aufgabe auf den Teil (b) zurück.

4. $\boxed{\textit{4 Punkte}}$ Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) := f(x, g(x)),$$

in Termen der (partiellen) Ableitungen von f und g. Begründen Sie Ihre Antwort.

5. $\boxed{\textit{7 Punkte}}$ Gegeben sei das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$,

$$v(x) = f(|x|)\frac{x}{|x|},$$

mit $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

(a) Bestimmen Sie die Rotation von v:

(b) Ein Punktteilchen bewegt sich im Vektorfeld v mit konstanter Geschwindigkeit auf dem Kreis um $0 \in \mathbb{R}^2$ mit Radius 1. Bestimmen Sie das Arbeitsintegral für einen Kreisumlauf im mathematisch positiven Sinne. Begründen Sie Ihre Antwort.

6. $\boxed{\textit{6 Punkte}}$ Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine in $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ differenzierbare Funktion mit $f(a) = 2$. Die Richtungsableitung von f in a lautet:

$$D_v f(a) = \begin{cases} 3 & \text{für } v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ 1 & \text{für } v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom erster Ordnung von f um a. Begründen Sie Ihre Antwort.

7. $\boxed{\textit{12 Punkte}}$ Bestimmen Sie die lokalen Minima und Maxima der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$$

auf:

(a) der offenen Einheitskreisscheibe $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$.

(b) dem Rand ∂E der offenen Einheitskreisscheibe.

8. $\boxed{\textit{14 Punkte}}$ Gegeben sei die folgende Differentialgleichung

$$x'(t) - x(t)\cos(t) = f(t)$$

mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung für

(a) $f(t) = 0$.

(b) $f(t) = \cos(t)$.

Zeichnen Sie ferner im Fall (a) das zugehörige Richtungsfeld der Differentialgleichung und geben Sie ein erstes Integral an.