FERIENKURS ANALYSIS 2 FÜR PHYSIKER

JOHANNES R. KAGER UND JULIAN SIEBER

Lösungsvorschlag zum Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1 (*zum Aufwärmen*)**.** Zeigen Sie durch Differenzieren und Einsetzen, dass die Funktion $x = C_1 \cdot \mathrm{e}^{5t} + C_2 \cdot \mathrm{e}^{-t}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = 0$ darstellt ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$). Wie lautet die durch den Punkt $P = (0; 5)$ gehende Lösungskurve, welche in $t = 0$ die Steigung $\dot{x} = 1$ besitzt?

Lösung. x und $\dot{x}$ werden in die Differentialgleichung eingesetzt und erfüllen diese Gleichung. Es handelt sich um die *allgemeine* Lösung, da sie als Lösung einer DGL zweiter Ordnung zwei frei wählbare Parameter enthält. Lösungskurve durch P mit angegebener Steigung: $x = \mathrm{e}^{5t} + 4 \cdot \mathrm{e}^{-t}$ ///

Aufgabe 2 ($\star$)**.** Lösen Sie folgende DGLen mithilfe „Trennen der Variablen" oder „Variation der Konstanten":

- $\dot{x}(1 + t^2) = t\,x$
- $t(t + 1)\dot{x} = x, \qquad x(1) = \frac{1}{2}$
- $\dot{x} + x \cdot \tan t = 5 \sin(2t)$

Lösung.

- Mit TdV folgt $\frac{1}{x}dx = \frac{t}{1+t^2}dt$. Beidseitig integrieren:

$$\ln|x| = \frac{1}{2}\ln|1 + t^2| + \ln|c|, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

  Es reicht nur eine Integrationskonstante zu addieren. Anstatt der klassischen Integrationskonstanten c, empfiehlt es sich $\ln|c|$ zu addieren, da dann die Umstellung nach x leichter fällt. Beidseitige Anwendung der Exponentialfunktion:

$$|x| = |c|\,\sqrt{|1 + t^2|} = |c|\,\sqrt{1 + t^2} \Rightarrow x = \pm|c|\,\sqrt{1 + t^2} = c\,\sqrt{1 + t^2}, \;\; c \in \mathbb{R}$$

- Mit TdV folgt die allgemeine Lösung $x = \frac{ct}{t+1}$. Einbeziehen der Anfangsbedingung $x(1) = \frac{1}{2}$ folgert: $x = \frac{t}{t+1}$. Zur Lösung des in TdV auftretenden Integrals $\int \frac{1}{t(t+1)}dt$ wurde eine Partialbruchzerlegung verwendet:

$$\int \frac{1}{t(t+1)}dt = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}\right)dt = \int \frac{A}{t}dt + \int \frac{B}{t+1}dt = \int \frac{1}{t}dt + \int \frac{-1}{t+1}dt$$

  Die Koeffizienten A, B findet man durch Aufstellen von $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}$ und Koeffizientenvergleich[1].

[1] vgl. auch Aufgabe 3 (i) TdV.

- Mithilfe TdV ergibt sich als Lösung der homogenen DGL $\dot{x} + x \cdot \tan t = 0$: $x_{\text{hom}} = c \cos t$.
  VdK erfordert nun das Ersetzen von c mit $c(t)$ und das Einsetzen des erhaltenen Ausdruckes in die inhomogene DGL: $x = c(t) \cos t$

$$\dot{x} + x \cdot \tan t = \dot{c}(t) \cos t - c(t) \sin t + c(t) \cos t \tan t = 5 \sin(2t)$$
$$\Rightarrow \dot{c}(t) = 5 \frac{\sin 2t}{\cos t} = 10 \sin t$$

  Integration liefert $c(t)$ (Int.konstante nicht vergessen!) und Einsetzen in $x = c(t) \cos t$ liefert die Lösung der inhomogenen DGL: $x = c \cos t - 10 \cos^2 t$.
  Achtung: das c in x_{hom} entspricht nicht dem freien Parameter c in der Lösung der inh. DGL. Man verwendet aus Gewohnheit oft in beiden Gleichungen den Buchstaben c, muss sich aber des Unterschieds bewusst sein. Ebenso ist $c(t) \neq c$.

///

Aufgabe 3 ($\star\star$). (i) Berechnen Sie sämtliche Lösungen im Bereich $x \neq 0$ der Differentialgleichung

$$\dot{x} + tx = tx^3 \tag{1}$$

und bestimmen Sie jeweils das maximale Existenzintervall.
(ii) Gibt es weitere Lösungen der Differentialgleichung (1), neben der in Teil (i) erhaltenen?

Lösung. (i) Es handelt sich um eine homogene DGL erster Ordnung, d.h. wir können versuchen sie mit TdV zu lösen. Alternativ sieht man, dass es sich um eine Bernoullische DGL handelt. Wir führen beide Lösungen an.

- **Trennen der Variablen:** Wir erhalten durch TdV

$$\int \frac{1}{x^3 - x} dx = \int t \, dt. \tag{2}$$

  Die linke Seite lässt sich durch Partialbruchzerlegung integrieren, dazu muss der Nenner jedoch in lineare Faktoren zerfallen, also das Polynom lauter reelle Nullstellen aufweisen. Wir finden $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x+1)(x-1)$, suchen also A, B, C, sodass

$$\int \frac{1}{x^3 - x} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{1-x} \right) dx.$$

  Setzt man die Integranden gleich, multipliziert mit dem gemeinsamen Nenner und fasst gleiche Potenzen von x zusammen bleibt

$$1 = (A + B + C)x^2 + (C - B)x - A.$$

  Steht auf der linken Seite ein x^2? Nein, d.h. $A + B + C \stackrel{!}{=} 0$. Selbe Überlegung liefert $C - B = 0$ und $-A = 1$. Wir lösen dieses lineare Gleichungssystem (3 Unbekannte, 3 Gleichungen) zu $A = -1, B = C = \frac{1}{2}$.

(2) zerfällt und wir integrieren zu

$$\begin{aligned}
-\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}dx &= \int t\ dt \\
-\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| &= \frac{1}{2}t^2 + \ln|c|, \quad c \in \mathbb{R} \\
\ln\left(\sqrt{|x+1|}\cdot\sqrt{|x-1|}\cdot\frac{1}{|x|}\right) &= \frac{1}{2}t^2 + \ln|c| \\
\ln\left(\sqrt{|x^2-1|}\frac{1}{|x|}\right) &= \frac{1}{2}t^2 + \ln|c| \\
\sqrt{|x^2-1|}\frac{1}{|x|} &= |c|\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2} \\
\left|1-\frac{1}{x^2}\right| &= |c|^2\mathrm{e}^{t^2} \\
\left|1-\frac{1}{x^2}\right| &= \pm c^2\mathrm{e}^{t^2}
\end{aligned}$$

Wir unterscheiden die zwei Vorzeichenfälle:

$$\left.\begin{array}{lll}
"+": & 1-\frac{1}{x^2} = c^2\mathrm{e}^{t^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 1-c^2\mathrm{e}^{t^2} \Rightarrow x = \frac{1}{\pm\sqrt{1-c^2\mathrm{e}^{t^2}}} \\
"-": & 1-\frac{1}{x^2} = -c^2\mathrm{e}^{t^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 1+c^2\mathrm{e}^{t^2} \Rightarrow x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+c^2\mathrm{e}^{t^2}}}
\end{array}\right\} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\tilde{c}\mathrm{e}^{t^2}}}, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

- **Bernoulli:**
  Wir schreiben die DGL in der Form

$$\begin{aligned}
0 &= \dot{x} + tx - tx^3 \\
&= \dot{x} + g(t)x + h(t)x^\alpha
\end{aligned}$$

mit $g(t) = t,\ h(t) = -t,\ \alpha = 3$.
Wir setzen $\dot{z} = x^{1-\alpha} = x^{-2}$ und haben

$$(\star) \qquad \dot{z} - 2tz = -2t.$$

Hierbei handelt es sich um eine inhomogene lineare DGL erster Ordnung, welche wir durch Variation der Konstanten lösen können. Der Vollständigkeit halber geben wir hier einen alternativen Lösungsweg an. Wir machen den Potenzreihen-Lösungsansatz

$$z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Einsetzen in $(\star)$ liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n t^{n+1} = -2t.$$

Koeffizientenvergleich (der selben Potenzen von t) liefert:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0 \\
2a_2 - 2a_0 &= -2 \Rightarrow a_2 = a_0 - 1 \\
3a_3 - 2a_1 &= 0 \\
&\vdots \\
na_n - 2a_{n-2} &= 0 \Rightarrow a_n = \frac{2}{n} a_{n-2}.
\end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion kann für $k = 1, 2, 3, \ldots$ gezeigt werden (Übung für den motivierten Leser), dass

$$a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k+2} = \frac{1}{(k+1)!} a_2.$$

Es folgt also

$$\begin{aligned}
z(t) &= a_0 + a_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!} \\
&= a_0 + a_2(\mathrm{e}^{t^2} - 1) \\
&= a_0 + \underbrace{(a_0 - 1)}_{=:C}(\mathrm{e}^{t^2} - 1) \\
&= C + 1 + C\mathrm{e}^{t^2} - C \\
&= 1 + C\,\mathrm{e}^{t^2},
\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
x(t)^{-2} &= 1 + C\,\mathrm{e}^{t^2} \\
x(t) &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + C\,\mathrm{e}^{t^2}}}.
\end{aligned}$$

Für $C \geq 0$ ist die Lösung für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert. Für $-1 < C < 0$ für $t \in \left(-\sqrt{\ln(-\frac{1}{C})}, \sqrt{\ln(-\frac{1}{C})}\right)$, für $C \leq -1$ gint es kein offenes Existenzintervall.

(ii) $x(t) = 0\,\forall t \in \mathbb{R}$ löst ebenfalls die DGL. (Dieser Fall wurde durch die Bedingung in (i) ausgeschlossen)

///

Aufgabe 4 ($\star$)**.** Sei $x : I \to \mathbb{R}$. Finden Sie die spezielle Lösung der DGL 2. Ordnung

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 0$$

mit den Anfangswertbedingungen $x(1) + \dot{x}(-3) = \mathrm{e}, \quad x(0) = 0.$

Lösung. Die Lösung kann mit dem Satz zur Lösungsnormalform errechnet werden (bzw. dem daraus gefolgerten Algorithmus in Tabelle 1), oder auch direkt mit Exponentialansatz $x = c\mathrm{e}^{bx}$. Dieser Ansatz wird eingesetzt in die DGL:

$$cb^2\mathrm{e}^{bx} + 2cb\mathrm{e}^{bx} - 3c\mathrm{e}^{bx} = 0 \Rightarrow b^2 + 2b - 3 = 0 \Rightarrow b_1 = 1, b_2 = -3$$

Allg. Lösung als Linearkombination der Fundamentalbasis:

$$x(t) = c_1\mathrm{e}^{b_1 x} + c_2\mathrm{e}^{b_2 x} = c_1\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{-3x}$$

Zweitere Anfangsbedingung gibt $c_1 = -c_2$. Eingesetzt in erstere erhält man $c = \frac{1}{1-e^8}$ und somit

$$x(t) = \frac{1}{1-e^8}\,(e^x + e^{-3}).$$

///

Aufgabe 5 ($\star$)**.** Sei $y(x) : I \to \mathbb{R}$. Lösen Sie folgende inhomogene DGL zweiter Ordnung:

$$\ddot{y} - \dot{y} - 6y = 12 \cdot \cosh(3x) \tag{3}$$

. Achtung: an der Stelle des gewohnten Fkt.namens x wird hier y verwendet. x ersetzt das gewohnte t.

Lösung. Unter Verwendung von Tabelle 1:

(i) Homogene DGL $\ddot{y} - \dot{y} - 6y$ lösen mit ch. Polynom:

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} 3 =: \lambda_1 \\ -2 =: \lambda_2 \end{cases}$$

Als allgemeine Lösung der homogenen DGL ergibt sich:

$$y_0 = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$$

(ii) Partikuläre Lösung: finde Lösungsansatz für Störfunktion $g(x) = 12\cosh(3x)$. In unserer Tabelle suchen wir vergebens ein Störglied con diesem Typ. Deshalb führen wir die Hyperbelfunktion mit Hilfe der Definitionsformel auf die Exponentialfunktion zurück.

$$g(x) = 12 \cdot \cosh(3x) = 12 \cdot \tfrac{1}{2}(e^{3x} + e^{-3x}) = 6 \cdot e^{3x} + 6 \cdot e^{-3x}$$

Der Tabelle entnehmen wir für die beiden Einzelstörglieder folgende Ansatz für eine partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned} g_1(x) = 6e^{3x} &\longrightarrow y_{p1} = Ax \cdot e^{3x} \\ g_2(x) = 6 \cdot e^{-3x} &\longrightarrow y_{p2} = B \cdot e^{-3x} \end{aligned}$$

Gesamt haben wir

$$y_p = Ax \cdot e^{3x} + B \cdot e^{-3x}.$$

Nun setzen wir y_p als y in (3) ein

$$\begin{aligned} &6A \cdot e^{3x} + 9Ax \cdot e^{3x} + 9B \cdot e^{-3x} \\ &-(A \cdot e^{3x} + 3Ax \cdot e^{3x} - 3B \cdot e^{-3x}) \\ &\qquad -6(Ax \cdot e^{3x} + B \cdot e^{-3x}) = 12\cosh(3x) \\ &\qquad \Rightarrow \quad 5A \cdot e^{3x} + 6B \cdot e^{3x} = 6 \cdot e^{3x} + 6 \cdot e^{-3x} \end{aligned}$$

und erhalten durch durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} 5A = 6 \quad &\Rightarrow A = 6/5 \\ 6B = 6 \quad &\Rightarrow B = 1. \end{aligned}$$

(iii) Gesamtlösung als $y = y_0 + y_p$

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} + \tfrac{6}{5}\,x \cdot e^{3x} + e^{-3x} \\ &= (c_1 + \tfrac{6}{5}\,x) \cdot e^{3x} + c_2 e^{-2x} + e^{-3x} \end{aligned}$$

///

Aufgabe 6 (⋆⋆)**.** Skizzieren Sie das Richtungsfeld der jeweiligen DGL 1. Ordnung mit Hilfe von Isoklinen und versuchen Sie eine Lösungskurve einzuzeichnen. Wie lautet die allgemeine Lösung der DGL? (Hinweis: zeichnen Sie Linien konstanter Steigung y' ein)

$$\text{a)} \quad y' = y, \qquad \text{b)} \quad x + yy' = 0$$

Lösung. Einzeichnen der Isoklinen beispielhaft für a): Setze $y' = \text{const.} =: a$ auf einen konstanten Wert in $\{1, 2, 3, 4\}$ und stelle um nach $y(x)$. Beispielsweise für $a = 1$:

$$1 \overset{!}{=} y' = y \Rightarrow y(x) = 1$$

An jeder Stelle, an der die Lösungskurve die Kurve $y(x) = a$ kreuzt, besitzt erstere die Steigung a.

Für b) ergibt sich:

$$\begin{aligned} a = 0: &\quad x + y \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \\ a \neq 0: &\quad x + y \cdot a = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{a}x \end{aligned}$$

Anhand des Richtungsfeldes erkennt man, dass die Lösungskurven konzentrische Mittelpunktskreise darstellen.

Analytische Lösungen (mithilfe „Trennen der Variablen“):

$$\text{a)} \quad y = ce^x, \qquad \text{b)} \quad y^2 + x^2 = c, \, c \geq 0.$$

Die Richtungsfelder sind in Abb. 1 und Abb. 2 dargestellt. Quelle: *L. Papula Mathematik für Naturwissenschaftler Band 2, 2012*

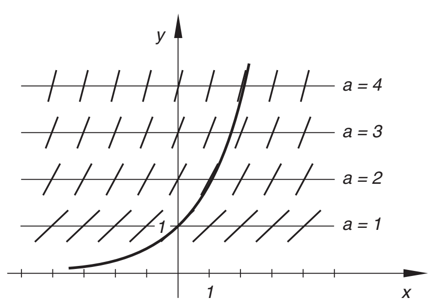

Abbildung 1. A6 a)

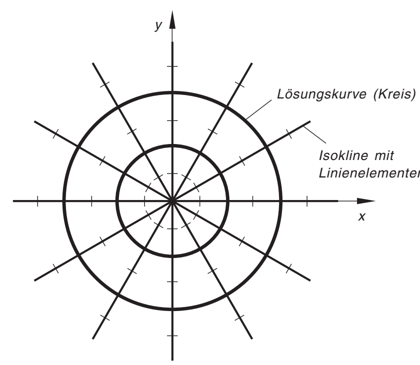

Abbildung 2. A6 b)

///

Aufgabe 7 (⋆⋆)**.** Lösen Sie folgende lineare DGLen n-ter Ordnung. (Hinweis: Satz zur Lösungsnormalform. Wenn die Gleichung nicht leicht lösbar ist, hilft stures Probieren mit betragsmäßig kleinen ganzen Zahlen.)

- $\dddot{x} + 2\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0$

- $y''' + y' = 0$
- $x^{(5)} + 2\dddot{x} + \dot{x} = 0$

Lösung. Nach dem Satz zur Lösungsnormalform gilt:

- $x = c_1\ e^x + c_2 \mathrm{e}^{-1x} + c_3 \mathrm{e}^{-2x}$
- $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm i \Rightarrow y = c_1 + c_2 \mathrm{e}^{ix} + c_3 \mathrm{e}^{-ix}$
- $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = i, \lambda_{4,5} = -i \Rightarrow x = c_1 + (c_2 + c_3 t)\,\mathrm{e}^{it} + (c_4 + c_5 t)\,\mathrm{e}^{-it}$

///

Aufgabe 8 ($\star$)**.** Lösen Sie folgende Bernoullische DGL:

$$x' + \frac{1}{t}x - x^3 = 0$$

Lösung. Es gilt also $g(t) = \frac{1}{t}$ und $h(t) = -1$. Nach den Schritten wie im Skript:

(i) Es ist $\alpha = 3$ und damit $1 - \alpha = -2$. Damit gilt:

$$x^{-2} = y = z, \qquad \text{sowie umgestellt:} \qquad x = \pm z^{-\frac{1}{2}}.$$

Durch Einsetzen in die DGL erhalten wir

$$z' - \frac{2}{t}z = -2.$$

(ii) Die homogene Gleichung lautet

$$z_h' - \frac{2}{t}z_h = 0 \Rightarrow \frac{1}{z_h}dz_h = \frac{2}{t}dt$$

woraus durch beidseitige Integration folgt

$$\ln|z_h| = 2\ln|t| + \ln|K|, \qquad \text{mit} \quad K \in \mathbb{R}$$

und umgestellt nach z_h

$$z_h = K \cdot t^2$$

Nach dem Verfahren der Variation der Konstanten erhalten wir daraus $z(t) = K(t) \cdot t^2$ und finden durch Einsetzen in die lineare DGL heraus, dass

$$K(t) = \frac{2}{t} + c \qquad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

gelten muss. Zusammengefasst ergibt dies:

$$z(t) = K(t) \cdot t^2 = c \cdot t^2 + 2t.$$

(iii) Wir setzen $z(t)$ in die Rückransformationsgleichung ein:

$$x(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{z(t)}} = \pm\frac{1}{\sqrt{c \cdot t^2 + 2t}}$$

Dieses ist die Lösung der Bernoullischen DGL.

///

Aufgabe 9 ($\star$)**.** Sei $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix der Differentialgleichung ($x \in \mathbb{R}^2$)

$$\dot{x} = Ax$$

(ii) Bestimmen Sie das maximale Existenzintervall der Lösung des Anfangswertproblems ($t \in \mathbb{R}$)

$$\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} \cos(t^2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung.

(i) Die Lösung der DGL lautet nach Satz 14: $x(t) = \mathrm{e}^{At}\alpha$. Die gesuchte Fundamentalmatrix ist also genau e^{At}.

- **1. Lösungsweg:**

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2$$

0 ist also doppelter Eigenwert von A

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff v_1 = 0\,,\ v_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

Eigenvektor ist z.B. $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Hauptvektor w aus $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v$, d.h z.B. $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Mit $S = (vw) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $S^{-1} = S$ und

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{At} &= S^{-1} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- **2. Lösungsweg:**

$$\begin{aligned} \dot{x} = Ax &\overset{x=\binom{x_1}{x_2}}{\iff} \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = ct + d \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = c \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} =: X(t) \quad \text{Fundamentalmatrix} \end{aligned}$$

- **3. Lösungsweg:**

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

$(*)$ folgt, da $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ nilpotent ist.

(ii) Die Funktion $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t^2) \\ 0 \end{pmatrix}$ sind stetig.
Die DGL $\dot{x} = Ax + f(t)$ ist (inhomogen) linear.
Nach Skript ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = Ax + f(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

///

Aufgabe 10 ($\star\star$)**.** Sei $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$.

(i) Bestimmen Sie alle Lösungen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ der Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(t)x \tag{4}$$

(ii) Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix $X(t), t \in \mathbb{R}$ für die Differentialgleichung (4), die

$$X(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

erfüllt. Ist die Fundamentalmatrix $X(t)$ durch die Bedingung (5) eindeutig bestimmt?

Lösung. (i)

$$\begin{aligned} \dot{x} = A(t)x \iff & \dot{x}_1 = x_1 + tx_2 \\ & \dot{x}_2 = x_2 \\ \iff & x_2 = \tilde{c}e^t, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R} \\ & \dot{x}_1 = x_1 + t\tilde{c}e^t \quad (*) \end{aligned}$$

Lösung des zu $(*)$ gehörenden homogenen Problems ist $x_1 = de^t, \quad d \in \mathbb{R}$.
Eine Lösung des inhomogenen Problems $(*)$ bestimmen wir durch den Ansatz

$$x_1(t) = d(t)e^t \quad \text{(Variation der Konstanten)}$$

$$\text{Einsetzen in } (*) \Rightarrow \dot{d}e^t + de^t \overset{!}{=} de^t + \tilde{c}te^t \Rightarrow \dot{d} = \tilde{c}t$$
$$\Rightarrow d(t) = \frac{\tilde{c}}{2}t^2 + \tilde{d}.$$

Wählt man $c := \frac{\tilde{c}}{2}$ erhält man also $x_1 = d\mathrm{e}^t + ct^2\mathrm{e}^t$.

$$\Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} d\mathrm{e}^t + c\,t^2\mathrm{e}^t \\ 2c\mathrm{e}^t \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} t^2\mathrm{e}^t \\ 2\mathrm{e}^t \end{pmatrix}, \quad c, d \in \mathbb{R} \quad (**)$$

ist die Menge aller Lösungen.

(ii) Nach $(**)$ bilden

$$\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

eine Basis des Lösungsraumes von $(**)$ mit

$$\tilde{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Fundamentalbasis ist also

$$X(t) = (\hat{x}(t), \tilde{x}(t)).$$

$X(t)$ ist durch die Forderung $X(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ eindeutig bestimmt, denn da $A(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ stetig ist, ist nach Vorlesung die Lösung des Anfangswertproblems für eine lineare Differentialgleichung

$$\dot{X} = AX \quad X(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eindeutig bestimmt.

///

Aufgabe 11 ($\star$)**.** Gegeben sei $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine homogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \tag{6}$$

Zeigen Sie: Ist $x(t) = u(t) + i \cdot v(t)$ eine komplexwertige Lösung der Differntialgleichung, so sind auch Realteil $u(t)$ und Imaginärteil $v(t)$ (reelle) Lösungen der Differentialgleichung.

Lösung.
Es ist $x(t) = u(t) + i \cdot v(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung (6), also

$$\ddot{x} + a\dot{x} + cx = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(u(t) + i \cdot v(t)) + a\,\frac{\partial}{\partial t}(u(t) + i \cdot v(t)) + b\,(u(t) + i \cdot v(t)) = 0.$$

Es wird gliedweise nach der reellen Variable t differenziert und wir erhalten

$$\ddot{u} + i \cdot \ddot{v} + a(\dot{u} + i \cdot \dot{v}) + b(u + i \cdot v) = 0$$
$$(\ddot{u} + a\dot{u} + bu) + i \cdot (\ddot{v} + a\dot{v} + bv) = 0.$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn Real- und Imaginärteil der linken Seite jeweils verschwinden. Somit ist

$$\ddot{u} + a\dot{u} + bu = 0 \qquad \text{und} \qquad \ddot{v} + a\dot{v} + bv = 0,$$

also sind Realteil $u(t)$ und Imaginärteil $v(t)$ beide reelle Lösungen der homogenen Differentialgleichung. ///

Aufgabe 12 ($\star\star$)**.** (i) Gegeben sei $f : [0,1] \to' T$, $f(x) = x^\alpha$. Für welche $\alpha \geq 0$ ist f Lipschitz-stetig? Geben Sie eine Lipschitz-Konstante an.

(ii) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$ Lipschitz-stetig ist. Welche Bedingungen müssen A und b erfüllen, damit f eine Kontraktion ist?

(iii) Betrachten Sie die Funktion $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$,

$$g(x) = \frac{1}{3}\left(x + \sin x + \frac{1}{x+1}\right)$$

und zeigen Sie, dass g einen eindeutigen Fixpunkt besitzt.

Lösung. (i) Für $\alpha < 1$ ist f nicht Lipschitz-stetig, denn für $x \in (0, 1]$ und 0 gilt, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} f'(x) = \infty.$$

Es kann also keine endliche Lipschitz-Konstante geben.

Für $\alpha \geq 1$ gibt es nach dem Mittelwertsatz zu $x_1, x_2 \in [0, 1]$ immer ein dazwischen liegendes ξ, so dass

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

erfüllt ist, somit ist

$$\left|\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| \leq \sup_{x\in[0,1]} := L.$$

Da $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ auf $[0, 1]$ stetig ist, ist $L \in \mathbb{R}$ wohldefiniert, hier $L = \alpha$. L ist eine (sogar optimale) Lipschitz-Konstante für f, denn für alle $x_1, x_2 \in [0, 1]$ gilt offenbar $|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|$.

(ii) Beh.: f ist Lipschitz-stetig mit Konstante $L =: \|A\| = \sup_{|x|=1} |f(x)|$ (Operatornorm).

Beweis: Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$. Dann ist

$$|f(y) - f(x)| = |Ay + b - (Ax + b)| = |A(y - x)| = \left|A\frac{y - x}{|y - x|}\right| |y - x| \leq \|A\| \, |y - x|.$$

Damit f eine Kontraktion ist muss $\|A\| < 1$ sein. In diesem Fall gilt für den Fixpunkt $x^* = f(x^*) = Ax^* + b$, bzw. $(\mathbb{1} - A)x^* = b$ oder explizit $x^* = (\mathbb{1} - A)^{-1}b$.

(iii) Für die Funktion g bemerken wir, dass für $x \in [0, \infty)$

$$|g'(x)| = \left|\frac{1}{3}\left(1 + \cos x - \frac{1}{(x+1)^2}\right)\right| < 1.$$

Damit ist g eine kontrahierende Selbstabbildung des vollständigen metrischen Raumes $[0, \infty)$ und der Banach'sche Fixpunktsatz liefert die Behauptung.

///