FERIENKURS ANALYSIS 2 FÜR PHYSIKER

JOHANNES R. KAGER UND JULIAN SIEBER

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1 (*zum Aufwärmen*)**.** Zeigen Sie durch Differenzieren und Einsetzen, dass die Funktion $x = C_1 \cdot \mathrm{e}^{5t} + C_2 \cdot \mathrm{e}^{-t}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = 0$ darstellt ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$). Wie lautet die durch den Punkt $P = (0; 5)$ gehende Lösungskurve, welche in $t = 0$ die Steigung $\dot{x} = 1$ besitzt?

Aufgabe 2 ($\star$)**.** Lösen Sie folgende DGLen mithilfe „Trennen der Variablen" oder „Variation der Konstanten":

- $\dot{x}(1 + t^2) = t\,x$
- $t(t + 1)\dot{x} = x, \qquad x(1) = \frac{1}{2}$
- $\dot{x} + x \cdot \tan t = 5 \sin(2t)$

Aufgabe 3 ($\star\star$)**.** (i) Berechnen Sie sämtliche Lösungen im Bereich $x \neq 0$ der Differentialgleichung

$$\dot{x} + tx = tx^3 \tag{1}$$

und bestimmen Sie jeweils das maximale Existenzintervall.

(ii) Gibt es weitere Lösungen der Differentialgleichung (1), neben der in Teil (i) erhaltenen?

Aufgabe 4 ($\star$)**.** Sei $x : I \to \mathbb{R}$. Finden Sie die spezielle Lösung der DGL 2. Ordnung

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 0$$

mit den Anfangswertbedingungen $x(1) + \dot{x}(-3) = \mathrm{e}, \quad x(0) = 0.$

Aufgabe 5 ($\star$)**.** Sei $y(x) : I \to \mathbb{R}$. Lösen Sie folgende inhomogene DGL zweiter Ordnung:

$$\ddot{y} - \dot{y} - 6y = 12 \cdot \cosh(3x) \tag{2}$$

. Achtung: an der Stelle des gewohnten Fkt.namens x wird hier y verwendet. x ersetzt das gewohnte t.

Aufgabe 6 ($\star\star$)**.** Skizzieren Sie das Richtungsfeld der jeweiligen DGL 1. Ordnung mit Hilfe von Isoklinen und versuchen Sie eine Lösungskurve einzuzeichnen. Wie lautet die allgemeine Lösung der DGL? (Hinweis: zeichnen Sie Linien konstanter Steigung y' ein)

$$\text{a)} \quad y' = y, \qquad \text{b)} \quad x + yy' = 0$$

Aufgabe 7 ($\star\star$)**.** Lösen Sie folgende lineare DGLen n-ter Ordnung. (Hinweis: Satz zur Lösungsnormalform. Wenn die Gleichung nicht leicht lösbar ist, hilft stures Probieren mit betragsmäßig kleinen ganzen Zahlen.)

- $\dddot{x} + 2\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0$

- $y''' + y' = 0$
- $x^{(5)} + 2\dddot{x} + \dot{x} = 0$

Aufgabe 8 ($\star$)**.** Lösen Sie folgende Bernoullische DGL:

$$x' + \frac{1}{t}x - x^3 = 0$$

Aufgabe 9 ($\star$)**.** Sei $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix der Differentialgleichung ($x \in \mathbb{R}^2$)

$$\dot{x} = Ax$$

(ii) Bestimmen Sie das maximale Existenzintervall der Lösung des Anfangswertproblems ($t \in \mathbb{R}$)

$$\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} \cos(t^2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10 ($\star\star$)**.** Sei $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$.

(i) Bestimmen Sie alle Lösungen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ der Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(t)x \tag{3}$$

(ii) Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix $X(t), t \in \mathbb{R}$ für die Differentialgleichung (3), die

$$X(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

erfüllt. Ist die Fundamentalmatrix $X(t)$ durch die Bedingung (4) eindeutig bestimmt?

Aufgabe 11 ($\star$)**.** Gegeben sei $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine homogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \tag{5}$$

Zeigen Sie: Ist $x(t) = u(t) + i \cdot v(t)$ eine komplexwertige Lösung der Differntialgleichung, so sind auch Realteil $u(t)$ und Imaginärteil $v(t)$ (reelle) Lösungen der Differentialgleichung.

Aufgabe 12 ($\star\star$)**.** (i) Gegeben sei $f : [0,1] \to' T$, $f(x) = x^\alpha$. Für welche $\alpha \geq 0$ ist f Lipschitz-stetig? Geben Sie eine Lipschitz-Konstante an.

(ii) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$ Lipschitz-stetig ist. Welche Bedingungen müssen A und b erfüllen, damit f eine Kontraktion ist?

(iii) Betrachten Sie die Funktion $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$,

$$g(x) = \frac{1}{3}\left(x + \sin x + \frac{1}{x+1}\right)$$

und zeigen Sie, dass g einen eindeutigen Fixpunkt besitzt.