FERIENKURS ANALYSIS 2 FÜR PHYSIKER

JOHANNES R. KAGER UND JULIAN SIEBER

Lösungsvorschlag zum Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1 ($\star$)**.** Bestimmen Sie die Länge des Graphen der Funktion $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2}\cosh(2x).$$

Lösung. Der Funktionsgraph von f wird durch die Kurve $\gamma : [-2, 2] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, f(t))$ parametrisiert. Aus

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh(2t) \end{pmatrix}$$

folgt

$$L = \int_{-2}^{2} |\dot{\gamma}(t)|\, dt = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + \sinh^2(2t)}\, dt = \int_{-2}^{2} \cosh(2t)\, dt = \left[\frac{1}{2}\sinh(2t)\right]_{-2}^{2} = \sinh(4) \simeq 27,289917.$$

///

Aufgabe 2 ($\star$)**.** Bestimmen Sie die Länge der durch $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 3t \\ 3t^2 - 4 \end{pmatrix},$$

gegebenen Kurve.

Lösung. Wir berechnen

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 3 \\ 6t \end{pmatrix}$$

und damit ist

$$L = \int_{0}^{1} |\dot{\gamma}(t)|\, dt = \int_{0}^{1} \sqrt{(3t^2 - 3)^2 + 36t^2}\, dt = 3\int_{0}^{1} t^2 + 1\, dt = 4.$$

///

Aufgabe 3 ($\star$)**.** Berechnen Sie die Kurvenintegrale 2.Art $\int_\gamma v(x) \cdot dx$ für

(i) $v(x, y) = (x^2 + y, 2xy)$ und γ der Einheitskreis, durchlaufen in der mathematisch positiven Richtung;
(ii) $v(x, y) = (x + y, 2x - y)$ und γ der Bogen beschrieben durch $y = x^3$ von $(-2, -8)$ bis $(1, 1)$.

Lösung. (i): Wir haben $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, und $\dot{\gamma}(t) = (-\sin(t), \cos(t))$. Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} \int_\gamma v(x) \cdot dx &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos^2(t) + \sin(t) \\ 2\cos(t)\sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} -\sin(t)\cos^2(t) - \sin^2(t) + 2\cos^2(t)\sin(t)\, dt \\ &= \left[\frac{1}{3}\cos^3(t) - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin(t)\cos(t) - \frac{2}{3}\cos^3(t)\right]_0^{2\pi} = -\pi. \end{aligned}$$

(ii): Wir haben $\gamma : [-2, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, t^3)$, und $\dot{\gamma}(t) = (1, 3t^2)$. Damit berechnen wir

$$\int_\gamma v(x) \cdot dx = \int_{-2}^{1} \begin{pmatrix} t + t^3 \\ 2t - t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt = \int_{-2}^{1} t + 7t^3 - 3t^5\, dt = \frac{15}{4}.$$

///

Aufgabe 4 ($\star$)**.** Sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 + t \\ t \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\int_\gamma v(x) \cdot dx$ für

(i) $v(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2y^2 + 2yz \\ y^2 \end{pmatrix}$;

(ii) $v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+z \\ x+y+z \\ x+z \end{pmatrix}$.

Lösung. (i): Die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(x,y,z) = x^2y^3 + y^2z$$

ist ein Potential von v. Damit gilt

$$\int_\gamma v(x) \cdot dx = \Phi(\gamma(1)) - \Phi(\gamma(0)) = \Phi(1,2,1) - \Phi(0,0,0) = 12.$$

Alternativ berechnen wir

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t+1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

und damit ist

$$\begin{aligned} \int_\gamma v(x) \cdot dx &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t^3(t^2+t)^3 \\ 3t^6(t^2+t)^2 + 2(t^2+t)t \\ (t^2+t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t+1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 x^2 \left(3 + 8x + 5x^2 + 9x^6 + 30x^7 + 33x^8 + 12x^9\right) dt = 12, \end{aligned}$$

was natürlich weitaus umständlicher als die Lösung mittels Potential ist.

(ii): Hier können wir kein Potential finden, da die Rotation von v nicht identisch verschwindet. Folglich müssen wir mit Hilfe von (1) direkt

$$\int_\gamma v(x) \cdot dx = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^3+t \\ t^3+t^2+2t \\ t^3+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t+1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t\left(3 + 5t + 7t^2 + 2t^3 + 3t^4\right) dt = \frac{349}{60}$$

berechnen. ///

Aufgabe 5 ($\star\star$)**.** Sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ xz \\ x^2 \end{pmatrix}$$

(i) Ist v ein Gradientenfeld?

(ii) Berechnen Sie $\int_\gamma v(x) \cdot dx$, wobei γ den Rand des Dreiecks mit Eckpunkten $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ in der Reihenfolge $(1,0,0) \to (0,1,0) \to (0,0,1) \to (1,0,0)$ durchläuft.

Lösung. (i): Wir berechnen

$$\nabla \times v(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0-x \\ 2x \\ z-1 \end{pmatrix},$$

was im Allgemeinen nicht verschwindet. Damit ist v nicht konservativ (Lemma von Poincaré) und erst recht kein Gradientenfeld.

(ii): Wir zerlegen den Weg γ in drei Teilstücke:

$$\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \\ t \end{pmatrix},$$
$$\gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1-t \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ und folglich

$$\int_\gamma v(x) \cdot dx = \sum_{i=1}^{3} \int_{\gamma_i} v(x) \cdot dx.$$

Wir berechnen

$$\int_{\gamma_1} v(x) \cdot dx = \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ (1-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = -\frac{1}{2},$$
$$\int_{\gamma_2} v(x) \cdot dx = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = 0,$$
$$\int_{\gamma_3} v(x) \cdot dx = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ t(1-t) \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = -\frac{1}{3},$$

sodass $\int_\gamma v(x) \cdot dx = -5/6$. ///

Aufgabe 6 ($\star\star$)**.** Sei $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und sei $v : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $v(x) = g(|x|)x$.

(i) Seien $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ eine stetig differenzierbare Kurve und $c > 0$ so, dass $|\gamma(t)| = c$ für alle $t \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass

$$\int_\gamma v(x) \cdot dx = 0.$$

(ii) Zeigen Sie, dass $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x)$ für alle $i \neq j$ und $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Lösung. (i): Es ist

$$\int_\gamma v(x) \cdot dx = \int_0^1 g(|\gamma(t)|)\gamma(t) \cdot \dot\gamma(t)\, dt = g(c) \int_0^1 \frac{d}{dt}|\gamma(t)|^2\, dt = 0.$$

(ii): Es ist für $i \neq j$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}(g(|x|)x_i) = g'(|x|)\frac{x_i x_j}{|x|} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x).$$ ///

Aufgabe 7 ($\star$)**.** Ist das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ z\cos(yz) + z \\ y\cos(yz) \end{pmatrix}$$

konservativ?

Berechnen Sie die Divergenz von v.

Lösung. Man rechnet nach, dass

$$\nabla \times v(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(yz) - yz\sin(yz) - \cos(yz) + yz\sin(yz) - 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und folglich ist v nicht konservativ.

Die Divergenz ist

$$\nabla \cdot v(x,y,z) = -\sin(yz)(y^2+z^2).$$

///

Aufgabe 8 ($\star$)**.** Bestimmen Sie ein Potential für das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$v(x,y) = e^{-x}\begin{pmatrix} 2x - x^2 - y^2 \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Lösung. Für das Potential Φ muss

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = 2e^{-x}y,$$

sodass $\Phi(x,y) = y^2e^{-x} + f(x)$. Ferner ist ausgehend von

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = f'(x) - y^2e^{-x} \overset{!}{=} e^{-x}(2x - x^2 - y^2)$$

$f(x) = e^{-x}x^2$. Zusammenfassend also

$$\Phi(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x}.$$

///

Aufgabe 9 ($\star\star$)**.** Seien $v, w : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \qquad w(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie für v und w die Rotation.
(ii) Geben Sie für v und w jeweils ein Potential an.
(iii) Bestimmen Sie für $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $\int_\gamma v(x) \cdot dx$ und $\int_\gamma w(x) \cdot dx$. Interpretieren Sie das Ergebnis im Hinblick auf das Lemma von Poincaré.

Lösung. (i): Wir berechnen

$$\nabla \times v(x,y) = \frac{\partial v_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial v_1}{\partial y}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

und genauso $\nabla \times w(x,y) = 0$.

(ii): Für v haben wir $\Phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

und für w haben wir $\Psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$\Psi(x,y) = \ln(x^2+y^2).$$

(iii): Wir berechnen

$$\int_\gamma v(x) \cdot dx = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt = 2\pi,$$

$$\int_\gamma w(x) \cdot dx = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt = 0.$$

Das Lemma von Poincaré ist in dieser Aufgabe nicht anwendbar, da $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht sternförmig ist. ///

Aufgabe 10 ($\star\star$)**.** Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(t))$ und $v_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$v_\alpha(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy \\ 3y^2z + \alpha x^2 \\ y^3 + z \end{pmatrix},$$

mit dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ ist v_α konservativ? Finden Sie für diese α eine Potentialfunktion von v_α.

(ii) Berechnen Sie

$$\int_\gamma v_\alpha \cdot dx$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lösung. (i): Wir berechnen

$$\nabla \times v_\alpha(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\alpha x - 2x \end{pmatrix}$$

und damit ist nach dem Lemma von Poincaré ($\mathbb{R}^3$ sternförmig) v_α nur für $\alpha = 1$ konservativ. Ein mögliches Potential für v_1 ist gegeben durch $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(x,y,z) = x^2 y + y^3 z + \frac{1}{2} z^2.$$

(ii): Wir finden zunächst

$$\int_\gamma v_\alpha \cdot dx = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\cos(t)\sin(t) \\ 3\sin^2(t)\cos(t) + \alpha\cos^2(t) \\ \sin^3(t) + \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} dt.$$

Aus

$$\int_0^{2\pi} \alpha \cos^3(t)\, dt = 0$$

folgt

$$\int_\gamma v_\alpha \cdot dx = \int_\gamma v_1 \cdot dx = 0,$$

da γ eine geschlossene Kurve und v_1 nach Teilaufgabe (i) ein Gradientenfeld ist. ///

Aufgabe 11 ($\star$)**.** Ist die Menge $M = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T = -A\} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Untermannigfaltigkeit? Falls ja, was ist die Dimension?

Lösung. Es ist leicht zu sehen, dass M, der Raum der *schiefsymmetrischen* Matrizen, ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist. Daher ist M insbesondere eine UMF. Die Diagonaleinträge einer schiefsymmetrische Matrix sind stets 0 und daher ist jede schiefsymmetrische Matrix durch die Einträge oberhalb (oder unterhalb) der Diagonalen bestimmt. Folglich gilt $\dim M = n(n-1)/2$. ///

Aufgabe 12 ($\star\star$)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Gruppe der symplektischen Matrizen (Die Gruppeneigenschaft dürfen Sie ohne Beweis verwenden; es schadet aber auch nicht sie nachzurechnen.) $\mathsf{SP}(2n;\mathbb{R}) = \{S \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \mid S^T\Omega S = \Omega\}$, wobei $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_n \\ -\mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix}$ ist, eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{2n\times 2n}$ ist. Welche Dimension hat die Untermannigfaltigkeit?

Bestimmen Sie den Tangentialraum $T_{\mathbb{1}}(\mathsf{SP}(2n;\mathbb{R}))$.

Lösung. Sei $M = \{A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \mid A^T = -A\} \subset \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ der Raum der schiefsymmetrischen Matrizen. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^{2n\times 2n} \to M$,

$$f(A) = A^T\Omega A.$$

Vorausgesetzt der Satz vom regulären Wert ist auf f und $\Omega \in M$ anwendbar, dann hätten wir $\mathsf{SP}(2n;\mathbb{R}) = f^{-1}(\{\Omega\})$ und $\dim \mathsf{SP}(2n;\mathbb{R}) = \dim \mathbb{R}^{n\times n} - \dim M = (2n)^2 - 2n(2n-1)/2 = 2n^2 + n$ (siehe Aufgabe 11).

Mit der Produktregel rechnen wir nach, dass für $S \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$

$$f'_A(H) = A^T\Omega H + H^T\Omega A \tag{2}$$

ist. Wir müssen also für die Anwendung des Satzes vom regulären Wert zeigen, dass f'_S surjektiv für alle $S \in \mathsf{SP}(2n;\mathbb{R})$ ist. Dazu sei nun $B \in M$ vorgelegt. Die Gleichung

$$f'_S(H) = S^T\Omega H + H^T\Omega S \stackrel{!}{=} B$$

wird gelöst von $H = \frac{1}{2}\Omega(S^T)^{-1}B^T$, da $\Omega^2 = -\mathbb{1}$ und $\Omega^{-1} = \Omega^T$. (Die Existenz von $(S^T)^{-1}$ folgt aus der Tatsache, dass für $S \in \mathsf{SP}(2n;\mathbb{R})$ auch $S^T \in \mathsf{SP}(2n;\mathbb{R})$ und der Gruppeneigenschaft von $\mathsf{SP}(2n;\mathbb{R})$.

Es folgt, dass $\mathsf{SP}(2n;\mathbb{R})$ eine $2n^2+n$–dimensionale UMF des $\mathbb{R}^{2n\times 2n}$ ist.

Für den Tangentialraum erhalten wir aus (2)

$$T_{\mathbb{1}}(\mathsf{SP}(2n;\mathbb{R})) = \{A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \,|\, f'_{\mathbb{1}}(A) = 0\} = \left\{A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \,\middle|\, \Omega A = (\Omega A)^T\right\}. \qquad ///$$

Aufgabe 13 ($\star$)**.** Wir betrachten die spezielle lineare Gruppe $\mathsf{SL}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,|\, \det A = 1\} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(i) $\mathsf{SL}(n)$ ist eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n\times n}$ und bestimmen Sie die Dimension.
(ii) Bestimmen Sie $T_{\mathbb{1}}(\mathsf{SL}(n))$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $\det'_A(H) = \det(A)\operatorname{tr}(A^{-1}H)$ für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Ferner ist die Gruppe der invertierbaren Matrizen $\mathsf{GL}(n;\mathbb{R})$ offen.

Lösung. (i): Wir betrachten die Funktion $f : \mathsf{GL}(n;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(A) = \det A$, und wenden den Satz vom regulären Wert an. Nach dem Hinweis gilt

$$f'_A(H) = \det(A)\operatorname{tr}(A^{-1}H) \tag{3}$$

für alle $A \in \mathsf{GL}(n;\mathbb{R})$ und folglich ist $f'_B(H) = \operatorname{tr}(B^{-1}H)$ für $B \in \mathsf{SL}(n)$. Sei nun $x \in \mathbb{R}$ vorgelegt dann wird für $B \in \mathsf{SL}(n)$ die Gleichung

$$f'_B(H) = x$$

durch $H = xB$ gelöst. Folglich ist f'_B surjektiv für alle $B \in \mathsf{SL}(n)$ und der Satz vom regulären Wert liefert, dass $\mathsf{SL}(n)$ eine (n^2-1)–dimensionale UMF des $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.

(ii): Aus (3) erhalten wir $f'_{\mathbb{1}}(H) = \operatorname{tr} H$, sodass

$$T_{\mathbb{1}}(\mathsf{SL}(n)) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,|\, f'_{\mathbb{1}}(A) = 0\} = \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,\middle|\, \operatorname{tr} A = 0\right\}. \qquad ///$$

Aufgabe 14 ($\star$)**.** Seien $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1(x,y,z) = x^2 + xy - y - z,$$
$$f_2(x,y,z) = 2x^2 + 3xy - 2y - 3z.$$

Zeigen Sie, dass

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, f_1(x,y,z) = f_2(x,y,z) = 0\}$$

eine $\mathcal{C}^\infty$–Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ der Dimension 1 ist.

Lösung. Wir betrachten die Funktion $f(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

Da f_1 und f_2 Polynome sind, gilt $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$. Ferner ist $T = f^{-1}(\{(0,0)\})$. Wir zeigen nun, dass $\operatorname{rang} Df(p) = 2$ für alle $p \in \mathbb{R}^3$. Dazu berechnen wir

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+y & x-1 & -1 \\ 4x+3y & 3x-2 & -3 \end{pmatrix}$$

und sehen unmittelbar $\operatorname{rang} Df(p) = 2$ für alle $p \in \mathbb{R}^3$. ///

Aufgabe 15 ($\star$)**.** Seien $a > 0$ und

$$S = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1,x_2,x_3 > 0 \text{ und } \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} = \sqrt{a}\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass S eine $\mathcal{C}^\infty$–Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ mit Dimension 2 ist.
(ii) Bestimmen Sie $T_p(S)$ für alle $p \in S$.

Lösung. (i): Mit der Funktion $f : \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1,x_2,x_3 > 0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} - \sqrt{a},$$

folgt $S = f^{-1}(\{0\})$. Ferner ist $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ und

$$Df(x_1,x_2,x_3) = (\nabla f(x_1,x_2,x_3))^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x_1}} & \frac{1}{2\sqrt{x_2}} & \frac{1}{2\sqrt{x_3}} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

für alle $(x_1,x_2,x_3) \in \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1,x_2,x_3 > 0\}$. Folglich ist $\operatorname{rang} Df(p) = 1$ für alle $p \in \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1,x_2,x_3 > 0\}$.

(ii): Der Tangentialraum $T_p(S)$ ist für $p = (p_1, p_2, p_3) \in S$ gegeben durch $\ker Df(p_1, p_2, p_3)$. Aus (4) liest man ab

$$\ker Df(p_1, p_2, p_3) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} \\ -\sqrt{p_2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{p_2} \\ -\sqrt{p_3} \end{pmatrix} \right\}. \qquad ///$$

Aufgabe 16 ($\star$)**.**

(i) Fixiere $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und definiere $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$,

$$f(A) = A^T BA.$$

Bestimmen Sie die Ableitung von f.

(ii) Seien nun zusätzlich $x, y \in \mathbb{R}^n$ und betrachte $g : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$,

$$g(A) = x^T A^T BAy.$$

Bestimmen Sie die Ableitung von g.

Lösung. (i): Mit der Produktregel erhalten wir sofort

$$f'_A(H) = H^T BA + A^T BH$$

für alle $A, H \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(ii): Wir haben $g = h \circ f$, wobei f die Funktion aus (i) und $h(A) = x^T Ay$ ist. Da h linear ist, ergibt die Kettenregel und (i)

$$g'_A(H) = x^T H^T BAy + x^T A^T BHy. \qquad ///$$

Aufgabe 17 ($\star$)**.** Seien $B, C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vorgelegt. Wir definieren $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$,

$$f(A) = \operatorname{tr}(BACA^T D).$$

Bestimmen Sie die Ableitung von f.

Lösung. Die Funktion kann geschrieben werden als $f = g_1 \circ g_2 \circ g_3$, wobei

$$g_1(A) = \operatorname{tr} A, \qquad g_2(A) = BAD, \qquad g_3(A) = ACA^T.$$

Wir wissen bereits (für g_3 siehe Aufgabe 16 (i))

$$(g_1)'_A(H) = \operatorname{tr} H, \qquad (g_2)'_A(H) = BHD, \qquad (g_3)'_A(H) = HCA^T + ACH^T.$$

Damit folgt aus der Kettenregel

$$\begin{aligned} f'_A(H) &= (g_1)'_{g_2\circ g_3(A)} \circ (g_2)'_{g_3(A)} \circ (g_3)'_A(H) = (g_1)'_{BA^TCAD} \circ (g_2)'_{ACA^T}(HCA^T + ACH^T) \\ &= (g_1)'_{BA^TCAD}(BHCA^T D + BACH^T D) = \operatorname{tr}(BHCA^T D) + \operatorname{tr}(BACH^T D). \qquad /// \end{aligned}$$

Aufgabe 18 ($\star\star$)**.** Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\times n}$, $f(t, A) = tA$. Bestimmen Sie die Ableitung von f.

Lösung. Da f bilinear und beschränkt ist, folgt unmittelbar aus dem Lemma auf S. 18 des Vorlesungsskripts

$$f'_{(t,A)}(s, H) = f(t, H) + f(s, A) = tH + sA. \qquad ///$$

Aufgabe 19 ($\star$)**.** Fixiere $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und sei $f : U \to \mathbb{R}$, $U = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A + X) \neq 0\}$, definiert durch

$$f(A) = \operatorname{tr}((A + X)^{-1}).$$

Bestimmen Sie die Ableitung von f.

Lösung. Die Funktion kann geschrieben werden als $f = g_1 \circ g_2 \circ g_3$, wobei

$$g_1(A) = \operatorname{tr} A, \qquad g_2(A) = A^{-1}, \qquad g_3(A) = A + X.$$

Wir wissen bereits

$$(g_1)'_A(H) = \operatorname{tr} H, \qquad (g_2)'_A(H) = -A^{-1}HA^{-1}, \qquad (g_3)'_A(H) = H.$$

Damit folgt aus der Kettenregel

$$\begin{aligned} f'_A(H) &= (g_1)'_{g_2\circ g_3(A)} \circ (g_2)'_{g_3(A)} \circ (g_3)'_A(H) = (g_1)'_{(A+X)^{-1}} \circ (g_2)'_{A+X}(H) \\ &= (g_1)'_{(A+X)^{-1}}(-(A + X)^{-1}H(A + X)^{-1}) = -\operatorname{tr}((A + X)^{-1}H(A + X)^{-1}). \qquad /// \end{aligned}$$

Aufgabe 20 ($\star$)**.** Fixiere $B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und definiere $f : \mathsf{GL}(n;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch

$$f(A) = \operatorname{tr}(BA^{-1}C)$$

Bestimmen Sie die Ableitung von f.

Lösung. Die Funktion kann geschrieben werden als $f = g_1 \circ g_2 \circ g_3$, wobei

$$g_1(A) = \operatorname{tr} A, \qquad g_2(A) = BAC, \qquad g_3(A) = A^{-1}.$$

Wir wissen bereits

$$(g_1)'_A(H) = \operatorname{tr} H, \qquad (g_2)'_A(H) = BHC, \qquad (g_3)'_A(H) = -A^{-1}HA^{-1}$$

Damit folgt aus der Kettenregel

$$\begin{aligned} f'_A(H) &= (g_1)'_{g_2\circ g_3(A)} \circ (g_2)'_{g_3(A)} \circ (g_3)'_A(H) = (g_1)'_{BA^{-1}C} \circ (g_2)'_{A^{-1}}(-A^{-1}HA^{-1}) \\ &= (g_1)'_{BA^{-1}C}(-BA^{-1}HA^{-1}C) = -\operatorname{tr}(BA^{-1}HA^{-1}C). \end{aligned}$$

///

Aufgabe 21 ($\star$)**.** Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{tx}}{1+t}\, dt.$$

(i) Zeigen Sie, dass F differenzierbar ist.
(ii) Zeigen Sie, dass

$$F(x) + F'(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt.

Lösung. (i): Die Differenzierbarkeit folgt unmittelbar aus dem Satz über parameterabhängige Integrale, dessen Anwendbarkeit wie folgt nachgeprüft wird:

- $f : \mathbb{R} \times [0,1]$, $f(x,t) = \frac{e^{tx}}{1+t}$, ist stetig als Quotient stetiger Funktionen mit Nenner $\neq 0$;
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{te^{tx}}{1+t}$ existiert und ist stetig.

(ii): Der Satz über parameterabhängige Integrale liefert nun

$$F(x) + F'(x) = F(x) + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{tx}}{1+t}\right) dt = \int_0^1 \frac{e^{tx}(1+t)}{1+t}\, dt = \int_0^1 e^{tx}\, dt = \frac{e^x - 1}{x}.$$

///

Aufgabe 22 ($\star\star$)**.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(y) = \int_0^1 f(x,y)\, dx$, differenzierbar ist, aber

$$F'(0) \neq \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} f(x,0)\, dx.$$

Kommentieren Sie dieses Ergebnis in Hinblick auf den Satz über parameterabhängige Integrale.

Lösung. In $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist f stetig differenzierbar und man rechnet nach, dass

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{3xy^2(x^2+y^2)^2 - 4xy^4(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}. \tag{5}$$

Der Satz über parameterabhängige Integrale liefert also die Differenzierbarkeit von F auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für die Differenzierbarkeit von F im Nullpunkt bemerken wir zunächst, dass

$$\begin{aligned} \frac{F(h) - F(0)}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{xh^3}{(x^2+h^2)^2}\, dx = h^2 \int_0^1 \frac{x}{(x^2+h^2)^2}\, dx \\ &= -\left[\frac{h^2}{2(x^2+h^2)}\right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{1+h^2} - \frac{1}{h^2}\right) = \frac{1}{2(1+h^2)}. \end{aligned}$$

Folglich existiert

$$F'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2(1+h^2)} = \frac{1}{2}.$$

Andererseits haben wir jedoch

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} f(x,0)\, dx = \int_0^1 0\, dx = 0,$$

da $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 0$ nach (5) für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und mit $f(0,h) = 0$ für alle $h \in \mathbb{R}$ ist auch

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0.$$

Diese Rechnungen zeigen, dass der Satz über parameterabhängige Integrale auf dieses Problem nicht anwendbar ist. In der Tat ist f im Nullpunkt nicht stetig, da beispielsweise

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \not\to 0 = f(0,0)$$

für $n \to \infty$. Mit selbiger Folge sieht man, dass $\frac{\partial f}{\partial y}$ im Ursprung unstetig ist, da

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \to \infty} \infty. \qquad ///$$