FERIENKURS ANALYSIS 2 FÜR PHYSIKER

JOHANNES R. KAGER UND JULIAN SIEBER

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1 ($\star$)**.** Bestimmen Sie die Länge des Graphen der Funktion $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2}\cosh(2x).$$

Aufgabe 2 ($\star$)**.** Bestimmen Sie die Länge der durch $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 3t \\ 3t^2 - 4 \end{pmatrix},$$

gegebenen Kurve.

Aufgabe 3 ($\star$)**.** Berechnen Sie die Kurvenintegrale 2.Art $\int_\gamma v(x) \cdot dx$ für

(i) $v(x, y) = (x^2 + y, 2xy)$ und γ der Einheitskreis, durchlaufen in der mathematisch positiven Richtung;
(ii) $v(x, y) = (x + y, 2x - y)$ und γ der Bogen beschrieben durch $y = x^3$ von $(-2, -8)$ bis $(1, 1)$.

Aufgabe 4 ($\star$)**.** Sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 + t \\ t \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\int_\gamma v(x) \cdot dx$ für

(i) $v(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2y^2 + 2yz \\ y^2 \end{pmatrix}$;
(ii) $v(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + z \\ x + y + z \\ x + z \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5 ($\star\star$)**.** Sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ xz \\ x^2 \end{pmatrix}$$

(i) Ist v ein Gradientenfeld?
(ii) Berechnen Sie $\int_\gamma v(x) \cdot dx$, wobei γ den Rand des Dreiecks mit Eckpunkten $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ in der Reihenfolge $(1, 0, 0) \to (0, 1, 0) \to (0, 0, 1) \to (1, 0, 0)$ durchläuft.

Aufgabe 6 ($\star\star$)**.** Sei $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und sei $v : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $v(x) = g(|x|)x$.

(i) Seien $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ eine stetig differenzierbare Kurve und $c > 0$ so, dass $|\gamma(t)| = c$ für alle $t \in [0, 1]$. Zeigen Sie, dass

$$\int_\gamma v(x) \cdot dx = 0.$$

(ii) Zeigen Sie, dass $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x)$ für alle $i \neq j$ und $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Aufgabe 7 ($\star$)**.** Ist das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ z\cos(yz) + z \\ y\cos(yz) \end{pmatrix}$$

konservativ?

Berechnen Sie die Divergenz von v.

Aufgabe 8 ($\star$)**.** Bestimmen Sie ein Potential für das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$v(x,y) = e^{-x}\begin{pmatrix} 2x - x^2 - y^2 \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9 ($\star\star$)**.** Seien $v, w : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \qquad w(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie für v und w die Rotation.
(ii) Geben Sie für v und w jeweils ein Potential an.
(iii) Bestimmen Sie für $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $\int_\gamma v(x) \cdot dx$ und $\int_\gamma w(x) \cdot dx$. Interpretieren Sie das Ergebnis im Hinblick auf das Lemma von Poincaré.

Aufgabe 10 ($\star\star$)**.** Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(t))$ und $v_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$v_\alpha(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy \\ 3y^2z + \alpha x^2 \\ y^3 + z \end{pmatrix},$$

mit dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ ist v_α konservativ? Finden Sie für diese α eine Potentialfunktion von v_α.
(ii) Berechnen Sie

$$\int_\gamma v_\alpha \cdot dx$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 11 ($\star$)**.** Ist die Menge $M = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T = -A\} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Untermannigfaltigkeit? Falls ja, was ist die Dimension?

Aufgabe 12 ($\star\star$)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Gruppe der symplektischen Matrizen (Die Gruppeneigenschaft dürfen Sie ohne Beweis verwenden; es schadet aber auch nicht sie nachzurechnen.) $\mathsf{SP}(2n;\mathbb{R}) = \{S \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \mid S^T\Omega S = \Omega\}$, wobei $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_n \\ -\mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix}$ ist, eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{2n\times 2n}$ ist. Welche Dimension hat die Untermannigfaltigkeit?

Bestimmen Sie den Tangentialraum $T_{\mathbb{1}}(\mathsf{SP}(2n;\mathbb{R}))$.

Aufgabe 13 ($\star$)**.** Wir betrachten die spezielle lineare Gruppe $\mathsf{SL}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A = 1\} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(i) $\mathsf{SL}(n)$ ist eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n\times n}$ und bestimmen Sie die Dimension.
(ii) Bestimmen Sie $T_{\mathbb{1}}(\mathsf{SL}(n))$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $\det'_A(H) = \det(A)\operatorname{tr}(A^{-1}H)$ für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Ferner ist die Gruppe der invertierbaren Matrizen $\mathsf{GL}(n;\mathbb{R})$ offen.

Aufgabe 14 ($\star$)**.** Seien $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1(x,y,z) = x^2 + xy - y - z,$$
$$f_2(x,y,z) = 2x^2 + 3xy - 2y - 3z.$$

Zeigen Sie, dass

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f_1(x,y,z) = f_2(x,y,z) = 0\}$$

eine $\mathcal{C}^\infty$–Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ der Dimension 1 ist.

Aufgabe 15 ($\star$)**.** Seien $a > 0$ und

$$S = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1,x_2,x_3 > 0 \text{ und } \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} = \sqrt{a}\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass S eine $\mathcal{C}^\infty$–Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ mit Dimension 2 ist.
(ii) Bestimmen Sie $T_p(S)$ für alle $p \in S$.

Aufgabe 16 ($\star$)**.**

(i) Fixiere $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und definiere $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$,
$$f(A) = A^T BA.$$
Bestimmen Sie die Ableitung von f.

(ii) Seien nun zusätzlich $x, y \in \mathbb{R}^n$ und betrachte $g : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$,
$$g(A) = x^T A^T BAy.$$
Bestimmen Sie die Ableitung von g.

Aufgabe 17 ($\star$)**.** Seien $B, C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vorgelegt. Wir definieren $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$,
$$f(A) = \mathrm{tr}(BACA^T D).$$
Bestimmen Sie die Ableitung von f.

Aufgabe 18 ($\star\star$)**.** Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n\times n}$, $f(t, A) = tA$. Bestimmen Sie die Ableitung von f.

Aufgabe 19 ($\star$)**.** Fixiere $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und sei $f : U \to \mathbb{R}$, $U = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A + X) \neq 0\}$, definiert durch
$$f(A) = \mathrm{tr}((A + X)^{-1}).$$
Bestimmen Sie die Ableitung von f.

Aufgabe 20 ($\star$)**.** Fixiere $B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und definiere $f : \mathsf{GL}(n; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch
$$f(A) = \mathrm{tr}(BA^{-1}C)$$
Bestimmen Sie die Ableitung von f.

Aufgabe 21 ($\star$)**.** Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{tx}}{1+t}\, dt.$$

(i) Zeigen Sie, dass F differenzierbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass
$$F(x) + F'(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$
für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt.

Aufgabe 22 ($\star\star$)**.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{(x^2+y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$
Zeigen Sie, dass $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(y) = \int_0^1 f(x, y)\, dx$, differenzierbar ist, aber
$$F'(0) \neq \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} f(x, 0)\, dx.$$
Kommentieren Sie dieses Ergebnis in Hinblick auf den Satz über parameterabhängige Integrale.