FERIENKURS ANALYSIS 2 FÜR PHYSIKER

JOHANNES R. KAGER UND JULIAN SIEBER

Lösungsvorschlag zum Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1 ($\star\star$)**.** Der Graph der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x^3 - 3xy^2$$

wird gelegentlich als *Affensattel* bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und bestimmen Sie ∇f.

(b) Untersuchen Sie das Verhalten von f an der Stelle $(0, 0)$. Überlegen Sie sich auch, wie Sie Extremalstellen der Funktion mit auf den Kreis $x^2 + y^2 \leq r^2$ eingeschränkten Definitionsbereich suchen würden (dafür müssen Sie keine Rechnung durchführen, Sie werden später noch auf ein entsprechendes Beispiel stoßen).

(c) Bestimmen Sie eine Funktion, deren Graph Tangentialebene an den Graph G_f im Punkt $(1, 0)$ ist.

Lösung. (a) Als Komposition differenzierbarer Funktionen ist f differenzierbar und es gilt

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \left(3(x^2 - y^2), -6xy\right).$$

(b) Wir betrachten die Hessematrix

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix},$$

welche an $(0, 0)$ ausgewertet semidefinit ist, uns also keinen Aufschluss über die Klasse des kritischen Punktes gibt. Es ist zwar $\mathrm{grad} f(0, 0) = (0, 0)$ und für alle Richtungsableitungen $D_u f(0, 0)$ mit $u \in \mathbb{R}^2, \|u\| = 1$, gilt dann

$$D_u f(0, 0) = \langle \nabla f(0, 0), u\rangle = 0.$$

Dennoch besitzt f im Nullpunkt weder Maximum noch Minimum. Denn betrachtet man etwa die Einschränkung von f auf die x-Achse, also $f(x, 0) = x^3$, so sieht man, dass f in jeder Umgebung des Nullpunktes sowohl positive, als auch negative Werte annimmt.

Wir wollen den Graph von f in der Nähe des Nullpunktes noch ein bisschen genauer ansehen. Um den Verlauf des Funktionswertes $f(x, y)$ entlang des Kreises $x^2 + y^2 \leq r^2$ zu betrachten muss eine passende Parametrisierung gefunden werden.
Dazu fassen wir f als Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ auf. Mit $z = (x, y) = x + \mathrm{i}y$ gilt

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 = \mathrm{Re}(x)^3 - 3\mathrm{Re}(x)\mathrm{Re}(y)^2 = \mathrm{Re}(z^3).$$

Wenn wir nun z in der so genannten *Polardarstellung* betrachten, d.h. $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = r\cos t + \mathrm{i}\,r\sin t$, so erhalten wir

$$f(z) = \mathrm{Re}(r^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}t}) = r^3\cos(3t);$$

die Einschränkung auf einen Kreis K mit Radius r um den Nullpunkt

$$f\big|_K : [0,2\pi] \to \mathbb{R}, \quad f\big|_K(t) := r^3\cos(3t)$$

hat also 3 Maximal- und 3 Minimalstellen. „Im Nullpunkt treffen sich 3 Täler und 3 Berge".

Alternative: Ohne Verwendung der komplexen Zahlenebene kann der Kreis um den Nullpunkt auch parametrisiert werden durch einen Radius $r \in \mathbb{R}^+$und Winkel $\varphi \in [0,2\pi)$: $(x,y) = r(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Anhand dieser Parameter können wir den Funktionswert entlang des Kreises ausdrücken:

$$\begin{aligned} f(r,\varphi) &= (r\cos\varphi)^3 - 3\,r\cos\varphi\,(r\sin\varphi)^2 = r^3(\cos^3\varphi - 3\,\sin^2\varphi\cos\varphi) \\ &= r^3(4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist äquivalent zu $r^3\cos(3\varphi)$; da man diese Gleichheit im Allgemeinen aber nicht aus dem Ärmel schüttelt wird man als nächsten Schritt direkt zur Maxima- und Minimasuche übergehen, indem man die Funktion nach φ ableitet und Nullstellen von $\frac{\partial f}{\partial\varphi}$ sucht.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial\varphi} = -12\cos^2\varphi\sin\varphi + 3\sin\varphi \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \sin\varphi = 0 \vee \cos\varphi = \pm\frac{1}{2} \\ \Rightarrow \varphi \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\} \end{aligned}$$

Eine genaue Auswertung des Funktionswertes an diesen Stellen ergibt, dass es sich abwechselnd um ein globales[1] Maximum und Minimum handelt.

Der Graph von f wird auch als *Affensattel* bezeichnet, denn ein Affe könnte sich bequem darauf setzen: je ein Bein in eines der Täler und den Schwanz ins dritte Tal.

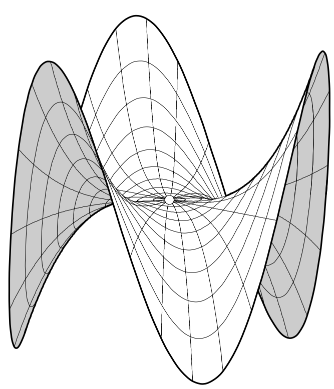

ABBILDUNG 1. Affensattel, Graph der Funktion $(x,y) \mapsto x^3 - 3xy^2$

[1] „global" nur mit der Einschränkung der (x,y)-Paare auf diesen Kreis. Auf ganz $\mathbb{R}^2$ betrachtet besitzt die Funktion f weder lokale noch globale Maxima oder Minima.

(c) Die Tangentialebene muss die selben partiellen Ableitungen haben, wie die Funktion f an dem betrachteten Punkt $(1,0)$. Abgeleitet und eingesetzt sind das: $\nabla f(1,0) = (3x^2 - 3y^2, -6xy)(1,0) = (3,0)$. Also ergibt sich als Tangentialebene

$$T(x,y) = f(1,0) + \nabla f(1,0) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} = 1 + 3(x-1) = 3x - 2.$$

Dies entspricht auch genau der Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung.

///

Aufgabe 2 ($\star$)**.** Bestimmen Sie die globalen Extrema der folgenden Funktionen. Finden Sie dazu jeweils die kritischen Punkte und klassifizieren Sie diese anhand der Hesse Matrix.

(a) $f(x,y) = x - 3y - \frac{1}{2}x^2 - y^2$
(b) $f(x,y) = \sin(x) + xy^2$

Lösung.

(a) $\nabla f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 1 - x_0 \\ -3 - 2y_0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \iff 1 - x_0 \overset{!}{=} 0 \wedge -3 - 2y_0 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow$ $x_0 = 1 \wedge y_0 = -\frac{3}{2}$, d.h. $(x_0,y_0) = (1,-\frac{3}{2})$ ist ein kritischer Punkt, hier könnte ein Extremum vorliegen. Dazu betrachten wir die Hesse Matrix

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte einer Diagonalmatrix entsprechen den Einträgen auf der Diagonale, d.h. H_f hat nur strikt negative Eigenwerte und ist somit positiv definit. An Punkt $(1,-\frac{3}{2})$ nimmt f somit zumindest ein isoliertes lokales Maximum an. Da $\lim_{|(x,y)|\to\infty} f(x,y) = -\infty$ gilt, folgt, dass $(1,-\frac{3}{2})$ das globale Maximum ist und es kein globales Minimum gibt.

(b) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x + y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$. Die untere Zeile $2xy \overset{!}{=} 0$ erfordert eine Fallunterscheidung:

$x = 0:$ Dann gilt $\cos x + y^2 = 1 + y^2 \overset{!}{=} 0$, was zu keiner reelen Lösung führt.

$y = 0:$ Dann gilt $\cos x + y^2 = \cos x \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten nun die Hesse Matrix:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \overset{(y=0)}{=} \begin{pmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$$

Mit der Menge $\left\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ an möglichen Werten, die x annehmen kann, kann H_f immer noch pos. definit, neg. definit oder indefinit sein. Es gilt dann nämlich $-\sin x \equiv (-1)^{k+1}$. Wir brauchen eine weitere Fallunterscheidung:

$x > 0:$ $2x$ ist strikt positiv, $-\sin x$ ist nur für ungerade k positiv. Also H_f positiv definit, falls k ungerade; H_f indefinit, falls k gerade.
- isoliertes lokales Minimum bei $x = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{N}_0$
- Sattelpunkt bei $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{N}_0$

$x < 0:$ $2x$ ist strikt negativ, $-\sin x$ ist nur für gerade k negativ. Also H_f negativ definit, falls k gerade; H_f indefinit, falls k ungerade.
- isoliertes lokales Maximum bei $x = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi,\ k \in \mathbb{N}_0$
- Sattelpunkt bei $x = -\frac{\pi}{2} - (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{N}_0$

///

Aufgabe 3 ($\star$)**.** Seien $x_1, \ldots, x_n \in (0, 2\pi)$ Winkel, sodass $\sum_{i=1}^n x_i = 2\pi$. Definiert man die Punkte $P_j := e^{i \sum_{k=1}^{j-1} x_k}$ für $j = 1, \ldots, n$, so bildet $P_1P_2, \ldots, P_{j-1}P_j, \ldots, P_nP_1$ ein n-Eck.
Man bestimme für $k = 1, \ldots, n$ die Winkel x_k so, dass der Flächeninhalt des n-Ecks maximal wird. Man verwende hierfür die Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

Lösung. Wir überlegen uns zuerst, wie die Fläche eines der Dreieckselemente berechnet werden kann. Nehmen wir als Beispiel das Dreieck $(0,0), P_1, P_2$, welches im Ursprung den Winkel x_1 aufweist. Durch elementare geometrische Überlegungen (Fläche eines gleichschenkligen Dreiecks mit Schenkellänge 1) erhalten wir als Formel für die Fläche:

$$A_1 = \sin \tfrac{x_1}{2} \cos \tfrac{x_1}{2}$$

Der Flächeinhalt des n-Ecks kann also als $f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n A_i$ beschrieben werden und durch Summensätze vereinfacht werden zu:

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sin \tfrac{x_i}{2} \cos \tfrac{x_i}{2} = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2} \sin x_i$$

Die Aufgabe kann dann folgendermaßen ausgedrückt werden: Finde Extrema der Funktion $f(\vec{x})$ (Flächeninhalt) unter der Nebenbedingung $g(x) = \sum_{i=1}^n x_i - 2\pi = 0$.

Die Methode der Lagrangemultiplikatoren fordert uns nun auf, die Gleichung $\nabla f = -\lambda \nabla g$ zu lösen. Es ist

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos(x_1) \\ \vdots \\ \frac{1}{2}\cos(x_n) \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = -\lambda \nabla g$$

oder

$$\cos(x_1) = \cos(x_2) = \ldots = \cos(x_n).$$

Dies ist offensichtlich der Fall, wenn alle x_i gleich sind. Desweiteren ist der Fall möglich, in dem alle Winkel außer einem gleich Null sind. Letzterer Fall beschreibt natürlich dsa Polygon mit minimalem Flächeninhalt, weshalb wir ersteren Fall als Lösung des Problems verwenden:

$$x_i = \frac{2\pi}{n} \qquad \forall \quad i \in 1, \ldots, n.$$

///

Aufgabe 4 ($\star\star$)**.**

(a) Wo besitzt die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) := 2x - 3y + 6z$ innerhalb bzw. auf der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ globale Extremstellen? (Verwenden Sie die Lagrangen Multiplikatoren)

(b) Wo besitzt die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x_1, x_2) := x_1^3 \mathrm{e}^{x_1 - x_2}$$

globale bzw. lokale Extremstellen?

Geben Sie jeweils an, ob es sich bei den Extremstellen um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

Lösung.

(a) Für Punkte innerhalb der Kugel untersuchen wir den Gradienten auf Nullstellen und kontrollieren, ob die gefundenen kritischen Punkte mit unserer Nebenbedingung verträglich sind.

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0.$$

Dies hat offensichtlich keine Lösung, weshalb wir unsere Suche nun auf die Kugeloberfläche konzentrieren werden.

Dazu verwenden wir die Methode der Lagrange Multiplikatoren. Wir haben als Nebenbedingung $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Nun gilt es

$$\nabla f(x,y,z) + \lambda \nabla g(x,y,z) = 0$$

zu lösen. Wir erhalten eine folgende Gleichung und ersetzten λ durch einen beliebigen anderen Koeffizienten $\frac{-1}{2\hat{\lambda}}$

$$2\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \hat{\lambda} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen dies in die Nebenbedingung g ein und folgern:

$$4\hat{\lambda}^2 + 9\hat{\lambda}^2 + 36\hat{\lambda}^2 = 1 \Rightarrow 49\hat{\lambda}^2 = 1 \Rightarrow \hat{\lambda} = \pm\frac{1}{7}$$

und somit 2 Vektoren an denen die Funktion f eingeschränkt auf g ein Extrema annimmt:

$$(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right) \quad \text{und} \quad (x_2, y_2, z_2) = \left(-\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{6}{7}\right)$$

Es ist $f(x_1, y_1, z_1) = \frac{43}{7}$ und $f(x_2, y_2, z_2) = -\frac{43}{7}$ und es ist direkt klar bei welchem Punkt es sich um das Maximum und bei welchem um das Minimum handelt.

(b) Wegen $\lim\limits_{x_1 \to \infty} g(x_1, 0) = \infty$ sowie $\lim\limits_{x_2 \to \infty} g(-1, x_2) = -\infty$ existieren weder ein globales Minimum, noch ein globales Maximum. Für lokale Extremstellen betrachten wir

$$\nabla g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^3 + 3x_1^2 \\ -x_1^3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{x_1 - x_2}$$
$$\text{und} \quad \nabla g(x_1, x_2) = 0 \iff x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Das heißt die Menge der kritischen Punkte ist durch $\{(0, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$ gegeben. Betrachte die Hessematrix:

$$H_g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^3 + 6x_1^2 + 6x_1 & -x_1^3 - 3x_1^2 \\ -x_1^3 - 3x_1^2 & x_1^3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{x_1 - x_2}$$
$$\text{und} \quad H_g(0, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese ist in jedem kritischen Punkt semidfefinit, daher bekommen wir über die Sätze aus der Vorlesung keine Informationen über lokale Extremstellen. Wir müssen also anders vorgehen:

Angenommen es existiert ein lokales Maximum $(0, \tilde{x}_2)$, dann existiert ein $r > 0$, sodass für alle Punkte $x' \in B_r(0, \tilde{x}_2)$ gilt, dass $g(x_1', x_2') \leq g(0, \tilde{x}_2) = 0$.

Betrachte jedoch den Punkt $(\frac{r}{2}, \tilde{x}_2) \in B_r(0, \tilde{x}_2)$. Für diesen gilt $g(\frac{r}{2}, \tilde{x}_2) = \left(\frac{r}{2}\right)^3 \mathrm{e}^{\frac{r}{2} - \tilde{x}_2} > 0$, was einen Widerspruch zur Annahme der Existenz eines lokalen Maximums darstellt.
Angenommen es existiert ein lokales Maximum $(0, \tilde{x}_2)$, dann erhält man den Widerspruch analog zu oben mit dem Punkt $(-\frac{r}{2}, \tilde{x}_2)$.

Wir schließen, dass die Funktion weder lokale noch globale Minima oder Maxima besitzt und die Menge $\{(0, x_2) | x_2 \in \mathbb{R}\}$ aus Sattelpunkten besteht.

Anstatt des Widerspruchbeweises kann auch einfach $f(x_1, x_2 + x_1)$ betrachtet werden. Dann haben wir $f(x_1, x_2 + x_1) = x_1^3 \mathrm{e}^{-x_2}$. Wählt man nun ein fixiertes x_2 bleibt eine Funktion der Art ax_1^3 übrig, welche in $x_1 = 0$ einen Sattelpunkt besitzt, somit sind f an den Punkten $(0, x_2)$ lauter Sattelpunkte besitzt.

///

Aufgabe 5 ($\star$)**.** Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $P = (1, 1)$ der Kurve $xye^{2(y-x)} = 1$.[2] Verwenden Sie - anders als im Beispiel im Skript - nun strikt den Satz über Implizite Funktionen.

Lösung. Sei $f(x, y) = xye^{2(y-x)} - 1$. Wir wenden auf die über $f(x, g(x)) = 0$ implizit definierte Funktion g den einschlägigen Satz an. f ist schonmal stetig differenzierbar und im interessierten Bereich $= 0$. Zusätzlich überprüfen wir die Invertierbarkeit von

$$D_y f(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = (1 + 2y)xe^{2(y-x)}\Big|_{(x,y)=(1,1)} = 3 \neq 0.$$

Folglich ist nach dem Satz über implizite Funktionen g in einer Umgebung von P eindeutig definiert. Selbiger Satz liefert

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1) = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)\right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \frac{1}{3}.$$

Für eine Tangente gilt also

$$t_P(x) = \frac{1}{3}x + c.$$

Die Konstante c finden wir, da der Punkt $P = (1, 1)$ gegeben ist, mit $t_P(1) = 1 = \frac{1}{3} \cdot 1 + c \Rightarrow c = \frac{2}{3}$.

Damit ergibt sich für die Tangente im Punkt $P = (1, 1)$ an die Kurve $xe^{2(x-y)} = 1$

$$t_P(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

///

Aufgabe 6 ($\star$)**.** Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) := (\mathrm{e}^{x+y} \cos(x - y), \mathrm{e}^{x+y} \sin(x - y))$.

(a) Zeigen Sie, dass f an allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ eine lokale Umkehrfunktion besitzt.
(b) Ist f injektiv?

[2] Diese Funktion war in der in der Übung ausgeteilten Form als $xe^{2(y-x)} = 1$ gegeben. Das ändert aber nichts am Konzept. Allerdings wäre die ursprüngliche Funktion direkt nach y auflösbar und man benötigt nicht den Satz über implizite Funktionen.

Lösung. (a) Die Funktion f ist stetig differenzierbar. Die Jacobi-Matrix an einer Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y}\cos(x-y) - e^{x+y}\sin(x-y) & e^{x+y}\cos(x-y) + e^{x+y}\sin(x-y) \\ e^{x+y}\sin(x-y) + e^{x+y}\cos(x-y) & e^{x+y}\sin(x-y) - e^{x+y}\cos(x-y) \end{pmatrix},$$

ist invertierbar, da ihre Determinante $\neq 0$ ist: Es ist

$$\begin{aligned} \det Df(x,y) &= e^{2(x+y)}\left(-\left[\cos(x-y) - \sin(x-y)\right]^2 - \left[\cos(x-y) + \sin(x-y)\right]^2\right) \\ &= -2e^{2(x+y)}\left(\cos^2(x-y) + \sin^2(x-y)\right) = -2e^{2(x+y)} \neq 0 \end{aligned}$$

Daher besitzt f nach Satz 14 an dieser Stelle eine lokale Umkehrfunktion wie behauptet.

(b) Es ist $f(0,0) = (1,0) = f(\pi, -\pi)$, also ist f nicht injektiv.

///

Aufgabe 7 ($\star\star$)**.** Angenommen, die Parameter $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2)$ liegen in der Nachbarschaft von $\boldsymbol{w_0} = (1,1)$. Folgende Gleichungen seien gegeben:

$$\begin{aligned} w_1^2 + w_2^2 + u_1^2 + u_2^2 &= 3, \\ w_1 + w_2 + u_1 + u_2 &= 3. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: gilt $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w_0}$, wird das System gelöst, wenn (u_1, u_2) mit $(0,1)$ ersetzt wird. Zeigen Sie weiters, dass wenn $\boldsymbol{w}$ nahe genug an $\boldsymbol{w_0}$ liegt, man trotzdem eine Lösung $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g(w)}$ findet, wobei $\boldsymbol{g}$ stetig differenzierbar ist. Beweisen Sie, dass $\boldsymbol{g} \in C^2$. Finden Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von $\boldsymbol{g}$ bei $\boldsymbol{w_0}$.

Lösung. Durch stures Einsetzen wird die Lösung des Systems an $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w_0} = (1,1)$ und $(u_1, u_2) = (0,1)$ gezeigt (beide Gleichungen sind korrekt). Für die nächsten beiden Arbeitsauftrag müssen die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen überprüft werden. Wir fassen das Gleichungssystem als eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auf, mit

$$f(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} w_1^2 + w_2^2 + u_1^2 + u_2^2 - 3 \\ w_1 + w_2 + u_1 + u_2 - 3 \end{pmatrix}.$$

f ist als Komposition beliebig oft differenzierbarer Funktionen selbst aus C^∞, $f(\boldsymbol{w_0}, u_1, u_2) = 0$ und $\boldsymbol{w_0} \times (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Bleibt zu zeigen, dass $\det D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{w_0}, u_1, u_2) \neq 0$:

$$\det D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{w_0}, u_1, u_2) = \det \begin{pmatrix} 2u_1 & 2u_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2u_1 - 2u_2 = -2 \neq 0.$$

Das heißt man kann in der direkten Umgebung von $\boldsymbol{w_0}$ eine Funktion $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g(w)}$ finden. Laut dem Satz ü. impl. Fkt. ist auch mindestens $g \in C^2$, da $f \in C^\infty \subset C^2$.

Für die erste Ableitung gilt (für $\boldsymbol{w}$ bei $\boldsymbol{w_0}$):

$$\begin{aligned} Dg(\boldsymbol{w}) &= -[D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{w}, g(\boldsymbol{w}))]^{-1} D_{\boldsymbol{w}} f(\boldsymbol{w}, g(\boldsymbol{w})) \\ &= -\frac{1}{2u_1 - 2u_2} \begin{pmatrix} 1 & -2u_2 \\ -1 & 2u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2w_1 & 2w_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{u_1 - u_2} \begin{pmatrix} u_2 - w_1 & u_2 - w_2 \\ w_1 - u_1 & w_2 - u_1 \end{pmatrix} \\ Dg(\boldsymbol{w_0}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nochmal ableiten nach $\boldsymbol{w}$ gibt

$$\frac{\partial Dg(\boldsymbol{w})}{\partial w_1} = \frac{1}{u_1 - u_2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial Dg(\boldsymbol{w})}{\partial w_2} = \frac{1}{u_1 - u_2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und eingesetzt

$$\frac{\partial Dg(\boldsymbol{w_0})}{\partial w_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial Dg(\boldsymbol{w_0})}{\partial w_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

///

Aufgabe 8 ($\star\star\star$)**.** Die Abbildung $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$E(x, y) := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \cos y \\ \mathrm{e}^x \sin y \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie die Bilder der achsenparallelen Geraden unter E und bestimmen Sie die Bildmenge $E(\mathbb{R}^2)$.

(b) Zeigen Sie, dass $D_E(x, y)$ invertierbar ist für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, aber E nicht injektiv ist. Sind damit die Bedingungen des Satzes über die Umkehrfunktion erfüllt?

(c) Nun seien $a := (0, \frac{\pi}{3})$ und $b := E(a)$. Bestimmen Sie die stetige Umkehrabbildung von E, die eine offene Umgebung von b auf eine offene Umgebung von a abbildet.

Lösung.

(a) Für festes $y_0 \in \mathbb{R}$ gilt $E(x, y_0) = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} \cos y_0 \\ \sin y_0 \end{pmatrix}$.
Die Bildmenge der reellen Exponentialfunktion sind genau die positiven reellen Zahlen. Das Bild einer zur x-Achse parallelen Geraden mit $y = y_0$ ist also eine "Halbgerade" ausgehend vom Nullpunkt (der Nullpunkt selbst gehört aber nicht dazu!), deren Richtung durch

$$\begin{pmatrix} \cos y_0 \\ \sin y_0 \end{pmatrix}$$

vorgegeben ist.

Für festes $x_0 \in \mathbb{R}$ haben wir $E(x_0, y) = \mathrm{e}^{x_0} \begin{pmatrix} \cos y \\ \sin y \end{pmatrix}$. Das Bild von $y \to \begin{pmatrix} \cos y \\ \sin y \end{pmatrix}$ ist die Einheitskreislinie. Das Bild einer zur y-Achse parallelen Geraden mit $x = x_0$ ist demnach ein Kreis um den Nullpunkt mit Radius e^{x_0}.

Anhand der Bilder der Geraden können wir erkennen, dass $E(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gilt.

(b) Es gilt $D_E(x, y) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \cos y & -\mathrm{e}^x \sin y \\ \mathrm{e}^x \sin y & \mathrm{e}^x \cos y \end{pmatrix}$.
Die Jacobi-Matrix ist für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ invertierbar, denn ihre Determinante hat den Wert $(\mathrm{e}^x \cos y)^2 - (-\mathrm{e}^x \sin y)\,\mathrm{e}^x \sin y = \mathrm{e}^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y) = \mathrm{e}^{2x} \neq 0$.
Weiter gilt $E(x, y + 2\pi) = E(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, daher ist E nicht injektiv.
Aufgrund der mangelnden Injektivität ist der Satz über die Umkehrfunktion nicht direkt anwendbar (siehe nächsten Punkt).

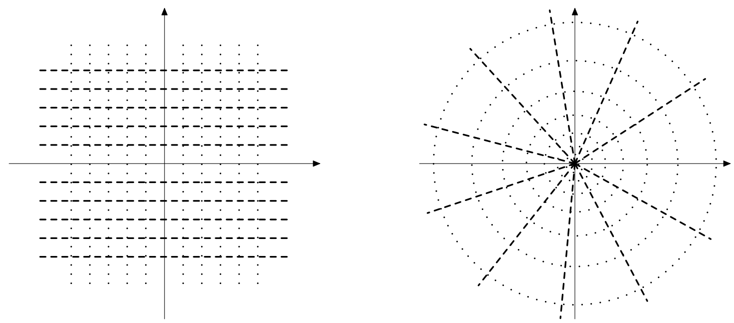

ABBILDUNG 2. Aufgabe 8 a)

(c) Da E nicht injektiv ist, existiert zwar keine *globale* Umkehrabbildung, aber wie wir mit Hilfe der Bilder der Geraden sehen können, bildet E etwa die Menge $\mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ bijektiv auf $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ ab. Hier können wir eine *lokale* Umkehrabbildung leicht angeben. Aus

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

folgt einerseits $\mathrm{e}^x = \sqrt{\mathrm{e}^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y)} = \left| \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \cos y \\ \mathrm{e}^x \sin y \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right| = \sqrt{u^2 + v^2}$, also $x = \frac{1}{2} \ln \left(u^2 + v^2\right)$ und andererseits

$$\frac{u}{v} = \frac{\sin y}{\cos y} = \tan y$$

(man beachte, dass in unserer Bildmenge stets $u \neq 0$ gilt). Um y zu bestimmen, sollten wir nicht all zu voreilig sein; es gibt viele $y \in \mathbb{R}$ mit $\tan y = \frac{v}{u}$; allerdings liegt nur eines davon im Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ nämlich $y = \arctan \frac{u}{v}$.

Wie Sie sicherlich schon gemerkt haben, handelt es sich bei E, wenn man $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ identifiziert, um nichts anderes als die komplexe Exponentialfunktion. Diese ist nicht injektiv; sie besitzt deshalb keine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion ("Logarithmus"). Schränkt man sie aber auf geeignete Mengen ein, so ist sie dort sogar ein Diffeomorphismus. Eine hier gesuchte Umkehrabbildung ist

$$F : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad F(u, v) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \ln \left(u^2 + v^2\right) \\ \arctan \frac{u}{v} \end{pmatrix}.$$

///