FERIENKURS ANALYSIS 2 FÜR PHYSIKER

JOHANNES R. KAGER UND JULIAN SIEBER

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1 ($\star\star$)**.** Der Graph der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) \coloneqq x^3 - 3xy^2$$

wird gelegentlich als *Affensattel* bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und bestimmen Sie ∇f.
(b) Untersuchen Sie das Verhalten von f an der Stelle $(0, 0)$. Überlegen Sie sich auch, wie Sie Extremalstellen der Funktion mit auf den Kreis $x^2 + y^2 \leq r^2$ eingeschränkten Definitionsbereich suchen würden (dafür müssen Sie keine Rechnung durchführen, Sie werden später noch auf ein entsprechendes Beispiel stoßen).
(c) Bestimmen Sie eine Funktion, deren Graph Tangentialebene an den Graph G_f im Punkt $(1, 0)$ ist.

Aufgabe 2 ($\star$)**.** Bestimmen Sie die globalen Extrema der folgenden Funktionen. Finden Sie dazu jeweils die kritischen Punkte und klassifizieren Sie diese anhand der Hesse Matrix.

(a) $f(x, y) = x - 3y - \frac{1}{2}x^2 - y^2$
(b) $f(x, y) = \sin(x) + xy^2$

Aufgabe 3 ($\star$)**.** Seien $x_1, \dots, x_n \in (0, 2\pi)$ Winkel, sodass $\sum_{i=1}^{n} x_i = 2\pi$. Definiert man die Punkte $P_j \coloneqq e^{i \sum_{k=1}^{j-1} x_k}$ für $j = 1, \dots, n$, so bildet $P_1P_2, \dots, P_{j-1}P_j, \dots, P_nP_1$ ein n-Eck.
Man bestimme für $k = 1, \dots, n$ die Winkel x_k so, dass der Flächeninhalt des n-Ecks maximal wird. Man verwende hierfür die Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

Aufgabe 4 ($\star\star$)**.**

(a) Wo besitzt die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) \coloneqq 2x - 3y + 6z$ innerhalb bzw. auf der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ globale Extremstellen? (Verwenden Sie die Lagrangen Multiplikatoren)
(b) Wo besitzt die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x_1, x_2) \coloneqq x_1^3 \mathrm{e}^{x_1 - x_2}$$

globale bzw. lokale Extremstellen?

Geben Sie jeweils an, ob es sich bei den Extremstellen um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

Aufgabe 5 ($\star$)**.** Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $P = (1, 1)$ der Kurve $xye^{2(y-x)} = 1$.[1] Verwenden Sie - anders als im Beispiel im Skript - nun strikt den Satz über Implizite Funktionen.

Aufgabe 6 ($\star$)**.** Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) := (\mathrm{e}^{x+y} \cos(x - y), \mathrm{e}^{x+y} \sin(x - y))$.

(a) Zeigen Sie, dass f an allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ eine lokale Umkehrfunktion besitzt.
(b) Ist f injektiv?

Aufgabe 7 ($\star\star$)**.** Angenommen, die Parameter $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2)$ liegen in der Nachbarschaft von $\boldsymbol{w_0} = (1, 1)$. Folgende Gleichungen seien gegeben:

$$w_1^2 + w_2^2 + u_1^2 + u_2^2 = 3,$$
$$w_1 + w_2 + u_1 + u_2 = 3.$$

Zeigen Sie: gilt $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w_0}$, wird das System gelöst, wenn (u_1, u_2) mit $(0, 1)$ ersetzt wird. Zeigen Sie weiters, dass wenn $\boldsymbol{w}$ nahe genug an $\boldsymbol{w_0}$ liegt, man trotzdem eine Lösung $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{w})$ findet, wobei $\boldsymbol{g}$ stetig differenzierbar ist. Beweisen Sie, dass $\boldsymbol{g} \in C^2$. Finden Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von $\boldsymbol{g}$ bei $\boldsymbol{w_0}$.

Aufgabe 8 ($\star\star\star$)**.** Die Abbildung $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$E(x, y) := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \cos y \\ \mathrm{e}^x \sin y \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie die Bilder der achsenparallelen Geraden unter E und bestimmen Sie die Bildmenge $E(\mathbb{R}^2)$.
(b) Zeigen Sie, dass $D_E(x, y)$ invertierbar ist für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, aber E nicht injektiv ist. Sind damit die Bedingungen des Satzes über die Umkehrfunktion erfüllt?
(c) Nun seien $a := (0, \frac{\pi}{3})$ und $b := E(a)$. Bestimmen Sie die stetige Umkehrabbildung von E, die eine offene Umgebung von b auf eine offene Umgebung von a abbildet.

[1] Diese Funktion war in der in der Übung ausgeteilten Form als $xe^{2(y-x)} = 1$ gegeben. Das ändert aber nichts am Konzept. Allerdings wäre die ursprüngliche Funktion direkt nach y auflösbar und man benötigt nicht den Satz über implizite Funktionen.