FERIENKURS ANALYSIS 2 FÜR PHYSIKER

JOHANNES R. KAGER UND JULIAN SIEBER

Lösungsvorschlag zum Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1 ($\star\star$)**.** Sei X eine beliebige Menge. Wir installieren auf X die diskrete Metrik $d : X \times X \to \{0, 1\}$,

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y, \\ 1 & x \neq y. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(i) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ konvergiert genau dann, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $x \in X$ gibt, sodass $x_n = x$ für alle $n \geq N$ (also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist schlussendlich konstant).

(ii) Der metrische Raum (X, d) ist genau dann kompakt, wenn $|X| < \infty$.

Unter welchen Bedingungen ist (X, d) vollständig?

Lösung. (i): "$\Longleftarrow$" ist klar. Für "$\Longrightarrow$" nehmen wir an, dass $x_n \to x$ und wählen $\varepsilon = 1/2$. Dann impliziert die Definition der Konvergenz, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $d(x_n, x) \leq 1/2$ für alle $n \geq N$ und damit $x_n = x$ für alle $n \geq N$ nach der Definition der trivialen Metrik.

(ii): Wir beginnen mit "$\Longleftarrow$". Da X eine endliche Menge ist, finden wir für eine gegebene Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ ein $x \in X$ und eine Menge $\mathcal{I} \subset \mathbb{N}$, $|\mathcal{I}| = \infty$, sodass $x_n = x$ für alle $n \in \mathcal{I}$. Wir schreiben $\mathcal{I} = \{n_1, n_2, \dots\}$ für $n_1 < n_2 < \cdots$, $n_k \in \mathbb{N}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit gilt nach (i) für die Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, dass $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Für "$\Longrightarrow$" nehmen wir an, dass $|X| = \infty$. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ mit paarweise verschiedenen Folgengliedern. In Anbetracht von (i) sehen wir, dass diese Folge keine konvergente Teilfolge besitzt ($d(x_m, x_n) = 1$ für alle $m \neq n$).

Der metrische Raum (X, d) ist *immer* vollständig. Dies folgt aus der Tatsache, dass eine Cauchy–Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. der trivialen Metrik schlussendlich konstant ist und daher nach (i) konvergiert.

Bemerkung. Teilaufgabe (i) zeigt insbesondere, dass A unabhängig von der Kardinalität abgeschlossen ist (eine konvergente Folge in A ist für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ konstant, also liegt insbesondere auch der Grenzwert in A). Da die diskrete Metrik beschränkt ist, ist auch die Menge A beschränkt. In Teilaufgabe (ii) haben Sie nun gesehen, dass für metrische Räume, die nicht isometrisch isomorph zu $\mathbb{C}^n$, ausgestattet mit einer von einer Norm induzierten Metrik, sind (Satz von Heine–Borel), aus Abgeschlossenheit und Beschränktheit *nicht* Kompaktheit folgt. ///

Aufgabe 2 ($\star$)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A, B \subset X$. Beweisen Sie

(i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(ii) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ und geben Sie ein Beispiel, welches zeigt, dass die Inklusion im Allgemeinen echt ist;

(iii) $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A$;

(iv) $\partial(\partial A) \subset \partial A$ und geben Sie ein Beispiel, welches zeigt, dass die Inklusion im Allgemeinen echt ist.

Lösung. (i): "$\subset$": Mit der Charakterisierung des Abschlusses von A als kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält, erhalten wir sofort, dass $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, da $\overline{A} \cup \overline{B}$ eine abgeschlossene Menge ist, die $A \cup B$ enthält ($\overline{A} \supset A$).

"$\supset$": Hier verwenden wir die Charakterisierung des Abschlusses mittels konvergenter Folgen, was auch die eigentliche Definition in der Vorlesung war. Sei $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, dann ist $x \in \overline{A}$ oder $x \in \overline{B}$. In beiden Fällen gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ (oder $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$), sodass $x_n \to x$. Diese Folge ist jedoch auch in $A \cup B$ und folglich $x \in \overline{A \cup B}$.

(ii): Die Inklusion folgt wie unter (i): $A \cap B \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ und letztere Menge ist abgeschlossen. Als einfaches und drastisches Beispiel nimmt man $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik. Dann ist

$$\overline{\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} = \overline{\varnothing} = \varnothing,$$

jedoch

$$\overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

(iii): "$\subset$": Sei $x \in \partial A$, dann gilt definitionsgemäß für alle $\varepsilon > 0$

$$A \cap B_\varepsilon(x) \neq \varnothing, \qquad A^c \cap B_\varepsilon(x) \neq \varnothing.$$

Es folgt $x \notin \operatorname{int}(A^c)$ und $x \notin \operatorname{int}(A)$. Mit $[\operatorname{int}(A^c)]^c = \overline{A}$ folgt

$$x \in [\operatorname{int}(A^c)]^c \cap [\operatorname{int}(A)]^c = \overline{A} \setminus \operatorname{int}(A).$$

"$\supset$": Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist $A^c \cap B_\varepsilon(x) \neq \varnothing$, da sonst $B_\varepsilon(x) \subset A$, also $x \in \operatorname{int}(A)$. Genauso ist $A \cap B_\varepsilon(x) \neq \varnothing$, da sonst $x \in \operatorname{int}(A^c)$, also $x \in (\overline{A})^c$.

(iv): Nach (iii) gilt

$$\partial(\partial A) = \overline{\partial A} \setminus \operatorname{int}(\partial A) = \partial A \setminus \operatorname{int}(\partial A) \subset \partial A,$$

da ∂A immer abgeschlossen ist. Letzteres folgt unmittelbar aus (iii), da

$$\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int}(A) = \overline{A} \cap [\operatorname{int}(A)]^c$$

der Schnitt zweier abgeschlossener Mengen ist.

Als Beispiel können wir erneut $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik nehmen. Dann ist $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \varnothing = \mathbb{R}$ und $\partial(\partial\mathbb{Q}) = \partial\mathbb{R} = \varnothing$, da $\mathbb{R}$ offen und abgeschlossen ist. ///

Aufgabe 3 ($\star$)**.** Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik und definieren

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0 \text{ und } x + y < 1\},$$
$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = \frac{1}{n} \text{ und } |y| < \frac{1}{n} \right\}.$$

Bestimmen Sie:

(i) $\operatorname{int}(A), \overline{A}, \partial A, \partial(\partial A)$;
(ii) $\operatorname{int}(B), \overline{B}, \partial B, \partial(\partial B)$.

Lösung. (i): $\operatorname{int}(A) = A$, da A offen ist. $\overline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0 \text{ und } x + y \leq 1\}$. Damit ist $\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0 \text{ und } (x = 0 \text{ oder } y = 0 \text{ oder } x + y = 1)\}$ und $\partial(\partial A) = \partial A$, da $\operatorname{int}(\partial A) = \varnothing$.

(ii): Es ist $\operatorname{int}(B) = \varnothing$,

$$\overline{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = \frac{1}{n} \text{ und } |y| \leq \frac{1}{n} \right\} \cup \{0\}.$$

Damit ist $\partial B = \overline{B}$ und $\partial(\partial B) = \partial B$, da $\operatorname{int}(\partial B) = \varnothing$. ///

Aufgabe 4 ($\star\star$)**.** Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

stetig?

Lösung. Die Funktion f ist für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ stetig als Quotient stetiger Funktionen und Nenner ungleich 0. Im Nullpunkt ist

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{|x||y|}{|x^2 + y^2|^\alpha} \leq \frac{1}{|x^2 + y^2|^{\alpha - 1}}$$

mit der elementaren Ungleichung $|x||y| \leq x^2 + y^2$. Also haben wir $|f(x,y) - f(0,0)| \to 0$ für $(x,y) \to (0,0)$ falls $\alpha < 1$.

Dieser Bereich für α ist in der Tat optimal, da für $(x_n, y_n) = (1/n, 1/n)$

$$f(x_n, y_n) = \frac{1/n^2}{(2/n^2)^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha n^{2(1-\alpha)}} \not\to 0$$

für $n \to \infty$ falls $\alpha \geq 1$. ///

Aufgabe 5 ($\star\star$). Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{(x^2+3y^2)^\alpha} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

stetig?

Lösung. Die Funktion f ist für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ stetig als Quotient stetiger Funktionen und Nenner ungleich 0. Den Nullpunkt untersuchen wir mittels Polarkoordinaten $\Phi : (0,\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$\Phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$|f(\Phi(r,\theta))| = \frac{r^3 \cos^2\theta |\sin\theta|}{(r^2\cos^2\theta + 3r^2\sin^2\theta)^\alpha} = \frac{r^3\cos^2\theta|\sin\theta|}{r^{2\alpha}(3-2\cos^2\theta)^\alpha} \leq \frac{r^3}{r^{2\alpha}} = r^{3-2\alpha},$$

was gegen 0 geht für $(x,y) \to (0,0)$, d.h. $r \to 0$, falls $\alpha < 3/2$. Für die Ungleichung wurde ausgenutzt, dass $\cos^2\theta|\sin\theta| \leq 1$ und $3 - 2\cos^2\theta \geq 1$.

Dieser Bereich für α ist in der Tat optimal, da für $(x_n, y_n) = (1/n, 1/n)$

$$f(x_n,y_n) = \frac{1/n^3}{(4/n^2)^\alpha} = \frac{1}{4^\alpha n^{3-2\alpha}} \not\to 0$$

für $n \to \infty$ falls $\alpha \geq 3/2$. ///

Aufgabe 6 ($\star\star$). Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn für jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, $f(X)$ zusammenhängend ist.

Lösung. "$\Longleftarrow$": Seien $U_1, U_2 \subset f(X) \subset \mathbb{R}$ offen, sodass $f(X) = U_1 \cup U_2$. Es folgt $X = f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2)$. Da f stetig ist, sind $f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2)$ offen. Wäre nun $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, dann hätten wir $\varnothing = f^{-1}(U_1 \cap U_2) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2)$ und damit wäre X nicht zusammenhängend.

"$\Longrightarrow$": Wir nehmen an, dass X nicht zusammenhängend ist und konstruieren eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, sodass $f(X) \subset \mathbb{R}$ ebenfalls unzusammenhängend ist. Sei nun also X nicht zusammenhängend, dann gibt es offene Mengen $U_1, U_2 \subset X$, sodass $U_1 \cup U_2 = X$ und $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Wir setzen $f : X \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in U_1, \\ 0 & x \in U_2. \end{cases}$$

Dann ist $f(X) = \{0,1\}$, was nicht zusammenhängend ist. Es bleibt also zu zeigen, dass f stetig ist. Dazu sei $A \subset \mathbb{R}$ offen. Wir prüfen, ob $f^{-1}(A)$ offen ist. Dazu müssen wir vier Fälle unterscheiden:

- $\{0,1\} \subset A$: $f^{-1}(A) = X$,
- $0 \in A$: $f^{-1}(A) = U_2$,
- $1 \in A$: $f^{-1}(A) = U_1$,
- $0, 1 \notin A$: $f^{-1}(A) = \varnothing$.

In allen vier Fällen ist die Urbildmenge offen und folglich ist f stetig. ///

Aufgabe 7 ($\star\star\star$). Sei (X,d) ein metrischer Raum, sodass jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ beschränkt ist. Zeigen Sie, dass X kompakt ist.

Lösung. Der Beweis ist etwas aufwändiger; die Idee jedoch ist einfach: wir nehmen an, dass X nicht kompakt sei und konstruieren eine unbeschränkte, stetige Funktion.

Sei nun also X nicht kompakt. Dann gibt es also eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, welche keine konvergente Teilfolge besitzt. Folglich kommt ein beliebiges $x \in X$ höchstens endlich oft in der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vor (andernfalls hätten wir eine konstante, also konvergente Teilfolge). Wir können also zu einer Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ übergehen, deren Folgenglieder paarweise verschieden sind. Diese Teilfolge bezeichnen wir der Bequemlichkeit halber weiterhin mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und bemerken, dass diese Teilfolge weiterhin keine konvergente Teil–Teilfolge besitzt. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir nun

$$\delta_n = \inf\{d(x_n, x_k) \,|\, k \in \mathbb{N} \setminus \{n\}\},$$

den minimalen Abstand der Restfolge zum Folgenglied x_n. Wir bemerken, dass $\delta_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist, da sonst $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen x_k konvergente Teilfolge besäße. Wir definieren weiter

$$f_n(x) = \max\left\{1 - \frac{3}{\delta_n} d(x_n, x), 0\right\} \tag{1}$$

und beobachten, dass f_n als Maximum stetiger Funktionen stetig ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Unsere gesuchte Funktion ist nun gemäß

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n(x) \tag{2}$$

gegeben. Wir bemerken sofort, dass f unbeschränkt ist, da $f(x_n) \geq n$ nach (1). Es bleibt zu zeigen, dass die Reihe (2) konvergiert und das f stetig ist. Dazu zeigen wir, dass jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung besitzt, innerhalb welcher höchstens ein f_n nicht verschwindet. Wir unterscheiden zwei Fälle für $x \in X$:

$x = x_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$: Hier haben wir $f_k(y) = 0$ für alle $y \in B_{\delta_n/2}(x_n)$ und $k \neq n$. Um dies zu sehen nehmen wir an, dass $f_k(y) \neq 0$ für ein $y \in B_{\delta_n/2}(x_n)$ und $k \neq n$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} \max\{\delta_k, \delta_n\} &\leq d(x_k, x_n) \leq d(x_k, y) + d(y, x_n) \leq \frac{\delta_k}{3} + \frac{\delta_n}{3} \\ &\leq \frac{2}{3} \max\{\delta_k, \delta_n\} < \max\{\delta_k, \delta_n\}, \end{aligned}$$

wobei wir benutzten, dass gemäß der Annahme $f_k(y) \neq 0$, wodurch nach (1)

$$0 \leq 1 - \frac{3}{\delta_k} d(x_k, y) \quad \Longleftrightarrow \quad d(x_k, y) \leq \frac{\delta_k}{3}. \tag{3}$$

$x \neq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$: Das Argument hier ist weitestgehend ähnlich zu dem vorherigen Fall. Wir definieren

$$\delta = \inf\{d(x, x_n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

und bemerken, dass $\delta > 0$, da wir sonst eine gegen x konvergente Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fänden. Wir behaupte, dass auf $B_{\delta/4}(x)$ höchstens ein f_n nicht verschwindet. Dazu nehmen erneut im Widerspruch an, dass wir $y, z \in B_{\delta/4}(x)$ finden, sodass $f_k(y) \neq 0$ und $f_n(z) \neq 0$ für $k \neq n$. Aus der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} d(y, x_k) &\geq d(x, x_k) - d(x, y) \geq \frac{3}{4}\delta, \\ d(y, x_n) &\geq d(x, x_n) - d(x, y) \geq \frac{3}{4}\delta, \end{aligned}$$

sodass aus der Rechnung (3)

$$\frac{3}{4}\delta < \frac{1}{3} \min\{\delta_k, \delta_n\}$$

folgt. Damit erhalten wir nun abschließend

$$\begin{aligned} 0 < \max\{\delta_k, \delta_n\} &\leq d(x_k, x_n) \leq d(x_k, y) + d(y, z) + d(z, x_n) \leq \frac{\delta_k}{3} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta_n}{3} \\ &\leq \frac{8}{9} \max\{\delta_k, \delta_n\} < \max\{\delta_k, \delta_n\}. \end{aligned}$$

///

Aufgabe 8 ($\star$). Bestimmen Sie

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos x + \cos y - 2}{x^2 + y^2}.$$

Lösung. Mit der Cosinus–Reihenentwicklung $\cos(x) = 1 - x^2/2 + \mathcal{O}(x^4)$ gilt

$$\frac{\cos x + \cos y - 2}{x^2 + y^2} = \frac{-1/2(x^2 + y^2) + \mathcal{O}(x^4) + \mathcal{O}(y^4)}{x^2 + y^2} \to -\frac{1}{2}$$

für $(x, y) \to 0$. ///

Aufgabe 9 ($\star$). Gibt es eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$\nabla f(x, y, z) = (yx, xz, xy^2) \quad ?$$

Lösung. Angenommen, es gebe eine solche Funktion. Diese wäre dann zwei Mal (sogar beliebig oft) stetig differenzierbar, da der gegebene Gradient ja auch beliebig oft stetig differenzierbar ist. Laut dem Satz von Schwarz wäre dann insbesondere

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} f(x,y,z).$$

Mit dem gegebenen Gradienten hätten wir aber hier dann

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y,z) = y^2 \neq y = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} f(x,y,z).$$

Demnach gibt es keine solche Funktion.

Man kann die Aufgabe auch äquivalent über die Rotationsfreiheit für Gradientenfelder lösen oder direkt die Integrabilitätsbedingung verwenden. ///

Aufgabe 10 ($\star$)**.** Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(t) = F(\sin t, \cos t)$.

Lösung. Wir definieren $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\phi(t) = (\sin t, \cos t)$. Dann gilt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G(t) &= \frac{d}{dt} F(\phi(t)) = DF(\phi(t)) D\phi(t) = \begin{pmatrix} f(\sin t, \cos t) & g(\sin t, \cos t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \\ &= f(\sin t, \cos t)\cos t - g(\sin t, \cos t) \sin t. \end{aligned}$$

///

Aufgabe 11 ($\star$)**.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vermittels

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

definiert. Beantworten Sie mit Beweis:

(i) Ist f stetig?
(ii) Ist f partiell differenzierbar?
(iii) Ist f differenzierbar?

Lösung. (i): Die Funktion f ist stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ als Quotient stetiger Funktionen mit Nenner $\neq 0$. Im Nullpunkt berechnen wir

$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq \frac{|x|(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = |x| \to 0$$

für $(x,y) \to (0,0)$. Damit ist f stetig.

(ii): Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist die Funktion f partiell differenzierbar als Quotient differenzierbarer Funktionen mit Nenner $\neq 0$. Für die partielle Differenzierbarkeit im Koordinatenursprung berechnen wir mittels der Definition der partiellen Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Dies zeigt die partielle Differenzierbarkeit von f.

(iii): Die Funktion f ist nicht (total) differenzierbar, da aus (4)

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt. Damit müsste im Falle der Differenzierbarkeit von f die Richtungsableitung in Richtung $v = 2^{-1/2}(1,1)$ im Ursprung gemäß

$$D_v f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot v = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

gegeben sein. Jedoch ist nach Definition

$$D_v f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h/\sqrt{2}, h/\sqrt{2}) - f(0,0)}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{2h^2} = 0.$$

Widerspruch! ///

Aufgabe 12 ($\star\star$). Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vermittels

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & y > 0, \\ x & y = 0, \\ -\sqrt{x^2+y^2} & y < 0 \end{cases}$$

definiert. Zeigen Sie:

(i) Jede Richtungsableitung von f in $(0,0)$ existiert.
(ii) Die Funktion f ist in $(0,0)$ nicht differenzierbar.

Lösung. (i): Sei $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ vorgelegt, dann müssen nach der Definition der Richtungsableitung die Existenz des Grenzwertes

$$D_v f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1, hv_2)}{h}$$

überprüfen. Dazu unterscheiden wir drei Fälle:

$v_2 > 0$: Hier gilt

$$\begin{aligned} f(hv_1, hv_2) &= \begin{cases} \sqrt{h^2v_1^2 + h^2v_2^2} & h > 0 \\ -\sqrt{h^2v_1^2 + h^2v_2^2} & h < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} |h|\sqrt{v_1^2 + v_2^2} & h > 0 \\ -|h|\sqrt{v_1^2 + v_2^2} & h < 0 \end{cases} \\ &= h|v| \end{aligned}$$

für $h \to 0$, sodass $D_v f(0,0) = |v|$.

$v_2 < 0$: Hier gilt nun $f(hv_1, hv_2) = -h|v|$ und folglich $D_v f(0,0) = -|v|$.

$v_2 = 0$: Hier ist $f(hv_1, hv_2) = f(hv_1, 0) = hv_1$, sodass $D_v f(0,0) = v_1$.

Damit ist die Existenz aller Richtungsableitungen nachgewiesen.

(ii): Aus Teilaufgabe (i) lesen wir

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} D_{(1,0)} f(0,0) \\ D_{(0,1)} f(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ab. Also müsste für $v = 2^{-1/2}(1,-1)$

$$D_v f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot v = 0$$

sein. Jedoch folgt aus Teilaufgabe (ii), dass $D_v f(0,0) = -|v| = -1$ ist. Widerspruch! ///

Aufgabe 13 ($\star\star$). Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(i) f ist partiell differenzierbar.
(ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f(x,y)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} f(x,y)$ existieren und sind stetig für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
(iii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} f(0,0)$.

Lösung. (i): Abseits der 0 ist die partielle Differenzierbarkeit klar, da f ein Quotient differenzierbarer Funktionen mit Nenner $\neq 0$ ist. Man berechnet für $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - xy\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}. \tag{5}$$

Im Nullpunkt berechnen wir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0.$$

(ii): Das folgt unmittelbar aus der Form von f. Alternativ kann man die länglichen Ausdrücke auch explizit berechnen.

(iii): Mit den expliziten Ausdrücken (5) berechnen wir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = 1,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = -1.$$

///

Aufgabe 14 ($\star$). Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^3+y^3} & x \neq -y, \\ 0 & x = -y, \end{cases}$$

im Nullpunkt existieren obwohl f dort unstetig ist.

Lösung. Man berechnet

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0.$$

Für die Unstetigkeit im Koordinatenursprung nutzen wir die Folge $(x_n, y_n) = (1/n, 1/n)$:

$$f(x_n, y_n) = \frac{1/n^3}{2/n^3} = \frac{1}{2} \not\to 0$$

für $n \to \infty$. ///

Aufgabe 15 ($\star$). Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} x \arctan(y/x) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass f im Nullpunkt partiell differenzierbar ist.
(ii) Seien $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$ und $v = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Zeigen Sie, dass die Richtungsableitung $D_v f(0,0)$ existiert und bestimmen Sie deren Wert.
(iii) Zeigen Sie, dass f nicht differenzierbar ist.

Lösung. (i): Wir berechnen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0,$$

da $\arctan 0 = 0$.

(ii): Aus der Definition der Richtungsableitung ergibt sich

$$D_v f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h\cos\varphi, h\sin\varphi) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \cos\varphi \arctan(\tan\varphi) = \varphi\cos\varphi.$$

(iii): Wäre f differenzierbar, so hätten wir $D_v f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot v = 0$ nach Teilaufgabe (i). Dies widerspricht jedoch dem Resultat aus (ii). ///

Aufgabe 16 ($\star$)**.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sodass

$$|f(x)| \leq |x_1 x_2|$$

für alle $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Zeigen Sie, dass f im Koordinatenursprung differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung.

Lösung. Aus der Eigenschaft $|f(x)| \leq |x_1 x_2|$ folgt sofort $f(0,0) = (0,0)$. Wir sehen uns die partiellen Ableitungen in $(0,0)$ an und erhalten

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_1(h,0)}{h} = 0,$$

da $|f_1(h,0)| \leq |f(h,0)| \leq |h \cdot 0| = 0$. Aus analogen Rechnungen für die verbleibenden partiellen Abelitungen folgt, dass, falls f im Ursprung total differenzierbar ist,

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt in der Definition der Differenzierbarkeit ((3.2) im Skript)

$$\frac{|f(h_1,h_2) - f(0,0)|}{|(h_1,h_2)|} = \frac{|f(h_1,h_2)|}{|(h_1,h_2)|} \leq \frac{|h_1 h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \to 0$$

für $(h_1,h_2) \to 0$. Hierbei wurde $|ab| \leq a^2 + b^2$ für $a, b \in \mathbb{R}$ benutzt. Folglich ist f im Ursprung differenzierbar mit obigem Jacobian. ///

Aufgabe 17 ($\star\star$)**.** Untersuchen Sie, ob die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \arctan(x/y) & y \neq 0, \\ 0 & y = 0, \end{cases}$$

im Koordinatenursprung differenzierbar ist.

Lösung. Aus der elementaren Ungleichung $|\arctan x| \leq \pi/2$ folgt

$$\frac{|f(h_1,h_2) - f(0,0)|}{|(h_1,h_2)|} = \frac{|f(h_1,h_2)|}{|(h_1,h_2)|} \leq \frac{\pi}{2} \frac{|h_1 h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \frac{\pi}{2}\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \to 0$$

für $(h_1,h_2) \to 0$. Hierbei wurde $|ab| \leq a^2 + b^2$ für $a, b \in \mathbb{R}$ benutzt. Folglich ist f im Ursprung differenzierbar mit Jacobian

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

///

Aufgabe 18 ($\star$)**.** Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x_2^2 \ln(3 + x_1^4).$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3 f((x_1,x_2);(0,0))$.

Lösung. Die Reihenentwicklung des Logarithmus lautet $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + \mathcal{O}(x^4)$ und mit den Logarithmusgesetzen folgt $\ln(3 + x_1^4) = \ln\left[3(1 + \frac{x_1^4}{3})\right] = \ln(3) + \ln\left(1 + \frac{x_1^4}{3}\right)$. Wir ersetzen den zweiten Summanden mit dessen Potenzreihe und erhalten

$$f(x) = x_2^2 \left(\ln(3) + \ln\left(1 + \frac{x_1^4}{3}\right)\right) = \ln(3) x_2^2 + \mathcal{O}(x_1^4 x_2^2)$$

und folglich

$$T_3 f((x_1,x_2);(0,0)) = \ln(3) x_2^2.$$

///

Aufgabe 19 ($\star$)**.** Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x_1^2 - 1)\sin(x_2).$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_6 f((x_1,x_2);(0,0))$.

Lösung. Aus der Reihenentwicklung $\sin(x) = x - x^3/6 + x^5/120 + \mathcal{O}(x^7)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_1^2 - 1)\left(x_2 - \frac{x_2^3}{6} + \frac{x_2^5}{120} + \mathcal{O}(x_2^7)\right) \\ &= x_1^2 x_2 - \frac{x_1^2 x_2^3}{6} - x_2 + \frac{x_2^3}{6} - \frac{x_2^5}{120} + \mathcal{O}(|(x_1, x_2)|^7) \end{aligned}$$

und folglich

$$T_6 f((x_1, x_2); (0,0)) = x_1^2 x_2 - \frac{x_1^2 x_2^3}{6} - x_2 + \frac{x_2^3}{6} - \frac{x_2^5}{120}.$$

///

Aufgabe 20 $(\star)$**.** Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)},$$

das Taylor–Polynom $T_2 f((x,y); (0,0))$.

Lösung. Wir berechnen

$$f(0,0) = 1, \qquad \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

sodass

$$\begin{aligned} T_2 f((x,y); (0,0)) &= f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} H_f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 1 - 2(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

///