# FERIENKURS ANALYSIS 2 FÜR PHYSIKER

JOHANNES R. KAGER UND JULIAN SIEBER

*Aufgabenblatt 1*

**Aufgabe 1** ($\star\star$)**.** Sei $X$ eine beliebige Menge. Wir installieren auf $X$ die diskrete Metrik $d : X \times X \to \{0, 1\}$,

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y, \\ 1 & x \neq y. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(i) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ konvergiert genau dann, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $x \in X$ gibt, sodass $x_n = x$ für alle $n \geq N$ (also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist schlussendlich konstant).

(ii) Der metrische Raum $(X, d)$ ist genau dann kompakt, wenn $|X| < \infty$.

Unter welchen Bedingungen ist $(X, d)$ vollständig?

**Aufgabe 2** ($\star$)**.** Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $A, B \subset X$. Beweisen Sie

(i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(ii) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ und geben Sie ein Beispiel, welches zeigt, dass die Inklusion im Allgemeinen echt ist;

(iii) $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A$;

(iv) $\partial(\partial A) \subset \partial A$ und geben Sie ein Beispiel, welches zeigt, dass die Inklusion im Allgemeinen echt ist.

**Aufgabe 3** ($\star$)**.** Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik und definieren

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0 \text{ und } x + y < 1\},$$

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = \frac{1}{n} \text{ und } |y| < \frac{1}{n} \right\}.$$

Bestimmen Sie:

(i) $\operatorname{int}(A), \overline{A}, \partial A, \partial(\partial A)$;

(ii) $\operatorname{int}(B), \overline{B}, \partial B, \partial(\partial B)$.

**Aufgabe 4** ($\star\star$)**.** Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

stetig?

**Aufgabe 5** ($\star\star$)**.** Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{(x^2+3y^2)^\alpha} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

stetig?

**Aufgabe 6** ($\star\star$)**.** Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass $X$ genau dann zusammenhängend ist, wenn für jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, $f(X)$ zusammenhängend ist.

**Aufgabe 7** ($\star\star\star$)**.** Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, sodass jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ beschränkt ist. Zeigen Sie, dass $X$ kompakt ist.

**Aufgabe 8** ($\star$)**.** Bestimmen Sie

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos x + \cos y - 2}{x^2 + y^2}.$$

**Aufgabe 9** ($\star$)**.** Gibt es eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$\nabla f(x, y, z) = (yx, xz, xy^2) \quad ?$$

**Aufgabe 10** ($\star$)**.** Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(t) = F(\sin t, \cos t)$.

**Aufgabe 11** ($\star$)**.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vermittels

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

definiert. Beantworten Sie mit Beweis:

(i) Ist $f$ stetig?
(ii) Ist $f$ partiell differenzierbar?
(iii) Ist $f$ differenzierbar?

**Aufgabe 12** ($\star\star$)**.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vermittels

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & y > 0, \\ x & y = 0, \\ -\sqrt{x^2+y^2} & y < 0 \end{cases}$$

definiert. Zeigen Sie:

(i) Jede Richtungsableitung von $f$ in $(0,0)$ existiert.
(ii) Die Funktion $f$ ist in $(0,0)$ nicht differenzierbar.

**Aufgabe 13** ($\star\star$)**.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(i) $f$ ist partiell differenzierbar.
(ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f(x,y)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} f(x,y)$ existieren und sind stetig für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
(iii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} f(0,0)$.

**Aufgabe 14** ($\star$)**.** Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^3+y^3} & x \neq -y, \\ 0 & x = -y, \end{cases}$$

im Nullpunkt existieren obwohl $f$ dort unstetig ist.

**Aufgabe 15** ($\star$)**.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} x \arctan(y/x) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass $f$ im Nullpunkt partiell differenzierbar ist.
(ii) Seien $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$ und $v = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Zeigen Sie, dass die Richtungsableitung $D_v f(0,0)$ und bestimmen Sie deren Wert.
(iii) Zeigen Sie, dass $f$ nicht differenzierbar ist.

**Aufgabe 16** ($\star$)**.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sodass

$$|f(x)| \leq |x_1 x_2|$$

für alle $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Zeigen Sie, dass $f$ im Koordinatenursprung differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung.

**Aufgabe 17** ($\star\star$)**.** Untersuchen Sie, ob die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \arctan(x/y) & y \neq 0, \\ 0 & y = 0, \end{cases}$$

im Koordinatenursprung differenzierbar ist.

**Aufgabe 18** ($\star$)**.** Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x_2^2 \ln(3 + x_1^4).$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3 f((x_1, x_2); (0,0))$.

**Aufgabe 19** ($\star$)**.** Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x_1^2 - 1) \sin(x_2).$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_6 f((x_1, x_2); (0,0))$.

**Aufgabe 20** ($\star$)**.** Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)},$$

das Taylor–Polynom $T_2 f((x,y); (0,0))$.