Analysis 3

Klausurvorbereitende Aufgaben

von Leo Maximov & Annika Schott

10.08.2018

Inhaltsverzeichnis

1 Riemann-Integration im R^n

1.1 Riemann-Integrale

1.1.1 Schwerpunktberechnung

Aufgabe: Berechnen Sie den Schwerpunkt des von den Kurven $y_1 = x$ und $y_2 = \sqrt{x}$ eingeschlossenen Flächenstücks D, wobei die Massenbelegung konstant ist, d.h. $\rho(x, y) = 1$.

Lösung: Es ist $x_s = \frac{\int\int_D x \ dxdy}{\int\int_D \ dxdy}$, wobei $D : \begin{cases} x \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$. Mit

$$\int\int_D dxdy = \int_{x=0}^{1}\int_{y=x}^{\sqrt{x}} dxdy = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{6},$$

$$\int\int_D x \ dxdy = \int_{x=0}^{1}\int_{y=x}^{\sqrt{x}} x \ dxdy = \int_0^1 x(\sqrt{x} - x) \ dx = \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{15}$$

und

$$\int\int_D y \ dxdy = \int_{x=0}^{1}\int_{y=x}^{\sqrt{x}} y \ dxdy = \int_0^1 \frac{y^2}{2}\Big|_x^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x - x^2)dx = \ ... \ = \frac{1}{12}$$

ergibt das dann: $x_s = \frac{2}{5}$, $y_s = \frac{1}{2}$.

Aus: Aufgabensammlung Mathematik, S. 66

1.1.2 Trägheitsmoment 1

Aufgabe: Berechnen SIe das Trägheitsmoment der von den Kurven $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$ $(x \geq 0)$ begrenzten Fläche D bezüglich der x-Achse, wenn $\rho(x, y) = x$ die Flächenbelegung darstellt.

Lösung: Mit

$$D : \begin{cases} 0 \leq y \leq e^{-x} \\ 0 \leq x \leq \infty \end{cases} \text{ erhalten wir: } I_x = \int\int_D \rho(x)y^2 \ dxdy = \int_0^\infty \int_{y=0}^{e^{-x}} xy^2 \ dxdy =$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} x\frac{y^3}{3}\Big|_x^{e^{-x}} dx = \frac{1}{3}\int_0^\infty xe^{-3x} \ dx = \ ... \ = \frac{1}{27}$$

Aus: Aufgabensammlung Mathematik, S.66

1.1.3 Trägheitsmoment 2

Aufgabe: Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_x bezüglich der x-Achse des von den Flächen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y^2 + x^2 = 4$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ eingeschlossenen Volumens, wobei $\rho(x, y, z) = 1$ ist.

Lösung: Es ist

$$I_x = \int\int\int_B (y^2 + z^2) \ dxdydz \text{ mit } B : \begin{cases} 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \\ 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

Das liefert:

$$I_x = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{z=0}^{\sqrt{x^2+y^2}} (y^2+z^2)\ dxdydz = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} \left(y^2 z + \frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy =$$

$$= \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} \left(y^2\sqrt{x^2+y^2} + \frac{1}{3}(x^2+y^2)^{3/2}\right) dxdy.$$

Da es sich bei dem Integrationsbereich dieses Doppelintegrals um einen Viertelkreis im ersten Quadranten handelt, sind Polarkoordinaten zweckmäßig. Damit folgt:

$$I_x = \int_{r=0}^{2}\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(r^3\sin^2\phi + \frac{r^3}{3}\right) r\ drd\phi = \underbrace{\int_0^2 r^4\ dr}_{\frac{32}{5}} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\phi d\phi}_{\frac{\pi}{4}} + \frac{\pi}{6}\underbrace{\int_0^2 r^4\ dr}_{\frac{32}{5}} = \frac{8\pi}{3}$$

Aus: Aufgabensammlung Mathematik, S.67

1.2 Normalbereiche

1.2.1 Doppelintegral 1

Aufgabe: Berechnen Sie das Doppelintegral

$$I = \int\int_B \left(xy + \frac{1}{(1+x+y)^2}\right) dxdy,$$

wobei B das Innere des Dreiecks mit den Eckpunkten $P(0,0)$, $Q(0,1)$ und $R(2,2)$ bezeichnet.

Lösung: B ist ein Normalbereich und ist durch $B = \left\{(x,y)\middle| x \le y \le 1 + \frac{x}{2}, 0 \le x \le 2\right\}$ gegeben. Damit erhalten wir:

$$I = \int_{x=0}^{2} dx \int_{y=x}^{1+\frac{x}{2}} \left(xy + \frac{1}{(1+x+y)^2}\right) dy = \int_{x=0}^{2} dx \left(x\frac{y^2}{2} - \frac{1}{1+x+y}\right)\Bigg|_{y=x}^{1+\frac{x}{2}} =$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{x}{2}\left(1+\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{2+\frac{3x}{2}} - \frac{x^3}{2} + \frac{1}{1+2x}\right] dx =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{8}x^3 - \frac{1}{2+\frac{3x}{2}} + \frac{1}{1+2x}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} - \frac{3x^4}{32} - \frac{2}{3}\ln\left(2+\frac{3x}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln(1+2x)\Bigg|_0^2 = 1 + \frac{4}{3} - \frac{3}{2} - \frac{2}{3}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{2}{3}\ln 2 =$$

$$= \frac{5}{6} - \frac{1}{6}\ln 5 + \frac{3}{2}\ln 2 \approx 1,027$$

Aus: Aufgabensammlung Mathematik, S.59

1.2.2 Doppelintegral 2

Aufgabe: Berechnen Sie das Doppelintegral

$$I = \int\int_B \frac{x}{1+xy}\, dxdy,$$

wobei B jener ebene Bereich ist, der von den Kurven $y = \frac{1}{x}$, $y = 1$ und $x = 2$ eingeschlossen ist.

Lösung: B ist ein Normalbereich und durch $B = \left\{(x,y) \middle| \frac{1}{x} \leq y \leq 1, 1 \leq x \leq 2\right\}$ gegeben.
Damit erhalten wir:

$$I = \int_{x=1}^{2} dx \int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{x}{1+xy} dy = \int_{x=1}^{2} \ln(1+xy)\Big|_{y=\frac{1}{x}}^{1} dx = \int_1^2 \big(\ln(1+x) - \ln 2\big) dx \overset{\text{p.I.}}{=}$$

$$= x\ln(1+x)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{1+x} dx - \ln 2 = 2\ln 3 - 2\ln 2 - x\Big|_1^2 + \ln(1+x)\Big|_1^2 =$$

$$= 2\ln 3 - 2\ln 3 - 1 + \ln 3 - \ln 2 = 3\ln 3 - 3\ln 2 - 1 = 3\ln\frac{3}{2} - 1$$

Aus: Aufgabensammlung Mathematik, S.59

1.2.3 Doppelintegral 3

Bestimmen Sie folgendes Integral

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2} dxdy$$

Lösung: Da wir für e^{-x^2} keine Stammfunktion bestimmen können, können wir dieses Integral nicht direkt berechnen. Wir vertauschen also die Integrationsreihenfolge. Da die Funktion e^{-x^2} beschränkt (und damit auf der kompakten Menge $0 \leq y \leq x \leq 1$ integrierbar ist, ist dies erlaubt. Es gilt

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$$

Es folgt damit

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^x e^{-x^2} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 xe^{-x^2} \mathrm{d}x$$

$$= \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2e}$$

Aus Tutorium Höhere Analysis Bsp. 40

1.3 Volumenberechnung

1.3.1 Volumenintegral 1

Aufgabe: Berechnen Sie den Inhalt des von den Flächen

$$z_1 = \sqrt{2 + x^2 + y^2} \text{ und } z_2 = x^2 + y^2$$

eingeschlossenen Volumenbereichs.

Lösung: Bei der ersten Fläche handelt es sich um den oberen Teil eines zweischaligen Rotationshyperboloids und bei der zweiten um ein Rotationsparaboloid (beide mit der z-Achse als Rotationsachse). Durch Gleichsetzen der z-Werte erhalten wir die Projektion der Schnittkurve in die xy-Ebene: $\sqrt{2-r^2} = r^2$ bzw. durch Quadrieren $2 + r^2 = r^4$. Die einzige positive, reelle Wurzel dieser biquadratischen Gleichung ist $r = \sqrt{2}$. Nachdem der Kreisbereich $r \leq \sqrt{2}$ hier auch die Projektion des Volumenbereichs in die xy-Ebene ist, erhalten wir:

$$V = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{2}} \int_{z=r^2}^{\sqrt{2+r^2}} r\, dr d\phi dz = 2\pi \int_{r=0}^{\sqrt{2}} r(\sqrt{2+r^2} - r^2) dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{2+r^2} dr - 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3\, dr =$$

$$= \frac{2\pi}{3}(2+r^2)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} r^4 \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{3} 8 - \frac{2\pi}{3} 2\sqrt{2} - \frac{\pi}{2} 4 = \ \dots\ = \frac{2\pi}{3}(5 - 2\sqrt{2}).$$

Aus: Aufgabensammlung Mathematik, S.61

1.3.2 Volumenintegral 2

Aufgabe: Berechnen Sie den Inhalt des von den Flächen

$$x^2 + y^2 = z_1^2 + z_1, z_1 \geq 0 \text{ und } z_2 = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

eingeschlossenen Volumenbereichs.

Lösung: Bei der ersten Fläche handelt es sich um den oberen Teil eines zweischaligen Rotationshyperboloids mit dem Scheitel im Ursprung (in expliziter Form geschrieben: $z = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 + y^2}$ und bei der zweiten um den unteren Teil eines Drehkegels mit der Spitze im Punkt $P(0,0,2)$ (beide mit der z-Achse als Rotationsachse). Durch Gleichsetzen der z-Werte erhalten wir die Projektion der Schnittkurve in die xy-Ebene. Da es sich um Rotationsflächen handelt, verwenden wir Zylinderkoordinaten und erhalten so für die Projektion der Schnittkurve in die xy-Ebene: $r^2 = (2-r)^2 + 2 - r$ bzw. weiters: $r = \frac{6}{5}$. Nachdem der Kreisbereich $r \leq \frac{6}{5}$ hier auch die Projektion des Volumenbereichs in die xy-Ebene ist, erhalten wir:

$$V = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{6/5} \int_{z=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+r^2}}^{2-r} r\, dr d\phi dz = 2\pi \int_0^{6/5} r\left(2 - r + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + r^2}\right) dr =$$

$$= \left(2\pi \frac{5}{2}\frac{1}{2}(\frac{6}{5})^2 - 2\pi\frac{1}{3}(\frac{6}{5})^3 - 2\pi\frac{1}{3}(\frac{1}{4} + r^3)^{3/2}\right)\Bigg|_0^{6/5} =$$

$$= 2\pi\left(\frac{153}{125} - \frac{1}{3}(\frac{1}{4} + \frac{36}{25})^{3/2} + \frac{1}{24}\right) = \ \dots\ = \frac{16\pi}{15}$$

Aus: Aufgabensammlung Mathematik, S. 62

2 Integralsätze der Vektoranalysis

2.1 Satz von Gauß

2.1.1 Oberflächenintegral 1

Aufgabe: Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$I = \int\int_{\partial B} (x + e^{z^2})dydz + (x^2 - y^2 + z^2)dzdx + (1 - xyz)dxdy$$

Dabei ist B jener Bereich, der von den beiden Flächen $z_1 = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ und $z_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ eingeschlossen wird.

Lösung: Bei den beiden Flächen handelt es sich um einen nach unten geöffneten Drehkegel mit Spitze bei $S(0, 0, 2)$ und einen nach oben geöffneten Drehkegel mit Spitze im Urpsrung. Sie schneiden sich längs eines Kreises, dessen Projektion in die xy-Ebene durch $2 - \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$, d.h. $x^2 + y^2 = 1$ gegeben ist.
Unter Verwendung des Satzes von Gauß erhalten wir:

$$I = \int\int\int_B \mathrm{div}\vec{v}\ dx\ dy\ dz,\ \text{mit}\ \vec{v} = (x + e^{z^2}, x^2 - y^2 + z^2, 1 - xyz)^T$$

woraus wir dann $\mathrm{div}\vec{v} = 1 - 2y - xy$ erhalten. Verwenden wir ferner wegen der Rotationssymmetrie des Integrationsbereiches B Zylinderkoordinaten, so folgt:

$$I = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=r}^{2-r} (1 - 2r\sin\phi - r^2 \sin\phi\cos\phi)r\ drd\phi dz =$$
$$\underbrace{\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=r}^{2-r} r\ drdz - \underbrace{\int_{\phi=0}^{2\pi} \sin\phi d\phi}_{0} \int_{r=0}^{1} \int_{z=r}^{2-r} r^2\ drdz - \underbrace{\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{2}\sin(2\phi)d\phi}_{0} \int_{r=0}^{1} \int_{z=r}^{2-r} r^3\ drdz =$$
$$= 2\pi \int_0^1 r(2 - r - r)\ dr = 4\pi \int_0^1 (r - r^2)\ dr = 4\pi(\tfrac{r^2}{2} - \tfrac{r^3}{3})|_0^1 = 4\pi(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) = \tfrac{2\pi}{3}$$

Bemerkung: Ohne Verwendung von Zylinderkoordinaten hätten wir erhalten:

$$I = \int\int\int_B (1 - 2y - xy)\ dxdydz$$

Wegen der Symmetrie des Integrationsbereiches bezüglich der xz- und der yz-Ebene sind das zweite und das dritte Integral Null. Das erste entspricht aber genau dem Volumeninhalt des Bereiches B. Dieser besteht aus zwei Drehkegeln mit Radius 1 und Höhe 1, woraus durch elementare Überlegungen folgt: $I = 2 \cdot \frac{1^2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Aus: Aufgabensammlung Mathematik, S. 85

2.1.2 Oberflächenintegral 2

Aufgabe: Gegeben ist die Vektorfunktion

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy \\ x + yz \\ yz \end{pmatrix}$$

und jener Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$, der von den Flächen $z_1 = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ und $z_2 = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ eingeschlossen ist und den Koordinatenursprung nicht enthält. Berechnen Sie das Oberflächenintegral $I = \int\int_{\partial B} \vec{v}\ d\vec{o}$.

Lösung: Der Bereich B ist ein ringförmiger Bereich, der innen von einem einschaligen Rotationshyberboloid, außen von einer Kugel und unten von der xy-Ebene begrenzt wird. Da wir zur Berechung von I den Satz von Gauß verwenden, bestimmen wir $\mathrm{div}\vec{v} = 2y + z$. Wegen der Rotationssymmetrie transformieren wir auf Zylinderkoordinaten. Die beiden Rotationsflächen schneiden sich längs eines Kreises mit Radius $r = \sqrt{\frac{5}{2}}$ in der Ebene $z = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Würden wir zunächst über z integrieren, müssten wir die r-Interation bei $r = \sqrt{\frac{5}{2}}$ unterteilen. Es ist daher zweckmäßig, als erstes über die Variable r zu integrieren. Damit erhalten wir:

$$I = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \int_{r=\sqrt{1+z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} (2r\sin\phi + z)r \ drd\phi dz$$
$$= \underbrace{\int_{\phi=0}^{2\pi} \sin\phi \ d\phi}_{0} \int_{z=0}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \int_{r=\sqrt{1+z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} 2r^2 \ drdz + \underbrace{\int_{\phi=0}^{2\pi}}_{0} \int_{z=0}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \ z\frac{r^2}{2}\Big|_{r=\sqrt{1+z^2}}^{4-z^2} \ dz$$
$$= \pi \int_{z=0}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} z(4 - z^2 - 1 - z^2) \ dz = \pi \int_{z=0}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} (3z - 2z^3) \ dz = \pi(\tfrac{3}{2}z^2 - \tfrac{z^4}{2})\Big|_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \pi(\tfrac{9}{4} - \tfrac{9}{8}) = \tfrac{9\pi}{8}$$

Aus: Aufgabensammlung Mathematik, S. 88

2.1.3 Oberflächenintegral 3

Wir betrachten das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ xy \\ z^2 \end{pmatrix}$$

und die Einheitskugel

$$V := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$$

Zeige, dass der Satz von Gauß $\int_{\partial V} F \mathrm{d}S = \int_V \operatorname{div}(F) \cdot \mathrm{d}V$ gilt.

Lösung: Dazu rechnen wir beide Seiten getrennt aus. Für die linke Seite ergibt sich die Parametrisierung

$$r(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, 0 < \varphi \leq 2\pi, 0 < \theta \leq \pi$$

sowie

$$n(\theta, \varphi) = r(\theta, \varphi), \mathrm{d}S = n \sin\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta$$

und

$$F(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\theta \\ \cos\varphi \sin\varphi \sin^2\theta \\ \cos^2\theta \end{pmatrix},$$

dass

$$\int_{\partial V} F \cdot \mathrm{d}S = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r \cdot F \cdot \mathrm{d}S$$
$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\cos^2\varphi \sin^2\theta + \cos\varphi \sin^2\varphi \sin^3\theta + \cos^3\theta\right) \sin\theta d\varphi d\theta$$

Zunächst das Integral über $d\varphi$. Der erste Term ergibt π, der zweite Term wird zu null und der dritte ist 2π und es bleibt

$$= \int_0^{\pi} \left(\pi \sin^2\theta + 2\pi \cos^3\theta\right) \sin\theta d\theta = \frac{4\pi}{3}$$

Kommen wir zu rechten Seite: Für die Divergenz erhalten wir sofort

$$\operatorname{div}(F) = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}xy + \frac{\partial}{\partial z}z^2$$
$$= 1 + y + 2z$$

Verwenden wir Kugelkoordinaten, so ergibt sich

$$\operatorname{div}(F) = 1 + r\cos\varphi\sin\theta + 2r\cos\theta$$

und folglich

$$\int_V \operatorname{div}(F)\mathrm{d}V = \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(1 + r\cos\varphi\sin\theta + 2r\cos\theta)r^2\sin\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$

$$\int_0^1\int_0^\pi(2\pi + 4\pi r\cos\theta)r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = \int_0^1 4\pi r^2\mathrm{d}r = \frac{4\pi}{3}$$

2.2 Satz von Green

2.2.1 Integral 1

Aufgabe: Berechnen Sie

$$L = \int_C 2(x+y)\ dx + (x^2+y^2)\ dy.$$

Dabei besteht C aus den beiden Teilkurven:
$C_1:\ y = -\sqrt{2x-x^2},\ 0 \le x \le 2$
$C_2:\ y = \frac{1}{2}\sin(\pi x).\ 0 \le x \le 2$

Lösung: Wir verwenden den Satz von Green. Dabei schließt die Kurbe C den Bereich $B:\ -\sqrt{2x-x^2} \le y \le \frac{1}{2}\sin(\pi x),\ 0 \le x \le 2$ ein. Damit erhalten wir:

$$L = \int_C v_1(x,y)dx + v_2(x,y)dy = \int\int_B\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)$$

mit $v_1(x,y) = 2(x+y)$ und $v_2(x,y) = x^2+y^2$:

$$\begin{aligned}
L &= \int_C 2(x+y)dx + (x^2+y^2)dy = \int\int_B(2x-2)\ dxdy = \int_{x=0}^2\int_{y=\sqrt{2x-x^2}}^{\frac{1}{2}\sin(\pi x)}(2x-2)\ dxdy \\
&= 2\int_0^2(x-1)y\Big|_{y=-\sqrt{2x-x^2}}^{\frac{1}{2}\sin(\pi x)}\ dx = \int_0^2(x-1)\sin(\pi x)\ dx + \int_0^2(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}\ dx \\
&= -\frac{1}{\pi}(x-1)\cos(\pi x)\Big|_0^2 + \frac{1}{\pi}\int_0^2\cos(\pi x)\ dx - \frac{1}{3}\big(1-(x-1)^2\big)^{3/2}\Big|_0^2 \\
&= -\frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\underbrace{\sin(\pi x)\Big|_0^2}_{0} - 0 = -\frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

Aus: Aufgabensammlung Mathematik, S.93

2.2.2 Integral 2

Aufgabe: Berechnen Sie
$$L = \int_{\partial B} (x^2 - y)dx + xy\ dy$$
längs der positiv orientierten Berandung ∂B des Bereichs B, die von den Kurven $x = \sqrt{1-y}$, $x = 0$ und $y = 0$ gebildet wird - einserseits als Linienintegral und andererseits mit Hilfe eines Integralsatzes.

Lösung: Wir zerlegen den Rand ∂B in drei oben angeführte Randkomponente:
$C_1 :\ x(t) = t,\ y(t) = 0,\ 0 \leq t \leq 1,$
$C_2 :\ x(t) = t,\ y(t) = 1 - t^2$, von $t = 1$ nach $t = 0$,
$C_3 :\ x(t) = 0,\ y(t) = 1 - t,\ 0 \leq t \leq 1.$

Damit erhalten wir:
$L_1 = \int_{C_1} (x^2 - y)dx + xy\ dy = \int_0^1 t^2\ dt = \frac{1}{3}.$
$L_2 = \int_{C_2} (x^2 - y)dx + xy\ dy = \int_1^0 \big(t^2 - (1 - t^2)\big)dt + \int_1^0 t(1 - t^2)(-2t)\ dt =$
$= \int_0^1 (-t^2 + 1 - t^2 + 2t^2 - 2t^4)\ dt = \int_0^1 (1 - 2t^4)\ dt = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$
$L_3 = \int_{C_3} (x^2 - y)\ dx + xy\ dy = 0$

Insgesamt folgt dann: $L = L_1 + L_2 + L_3 = \frac{1}{3} + \frac{3}{5} + 0 = \frac{14}{15}.$

Andererseits können wir L auch mit Hilfe des Satzes von Green berechnen. Mit $f(x, y) = x^2 - y$ und $g(x, y) = xy$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
L = \int_{\partial B} f(x,y)dx + g(x,y)dy &= \int\int_B \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\ dxdy = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x^2} (y+1)\ dxdy \\
&= \int_{x=0}^1 \left(y + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{1-x^2} = \int_{x=0}^1 \left(1 - x^2 + \frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2}\right)\ dx \\
&\int_{x=0}^1 \left(\frac{3}{2} - 2x^2 + \frac{x^4}{2}\right)\ dx = \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{10}\right) = \frac{14}{15}
\end{aligned}$$

Aus: Aufgabensammlung Mathematik, S. 94

2.2.3 Integral 3

Aufgabe: Berechnen Sie dsa Kurvenintegral

$$L = \int_C (\cos x + 3yx^2)\ dx + (x^2 + xy)\ dy$$

, wobei C die Berandung jenes Bereiches ist, für dessen Punkte gilt: $x^2 + y^2 \leq 1$ und $x^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 \geq \frac{1}{16}$.

Lösung: Wir verwenden den Satz von Green. Mit $v_1(x, y) = \cos x + 3yx^2$ und $v_2 = x^3 + xy$ folgt: $\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 3x^2 + y - 3x^2 = y$ und weiters: $L = \int\int_B y\ dxdy$. Der Integrationsbereich B besteht dabei aus jenem Teil des Einheitskreises K_1, der die Kreisscheibe K_2 nicht enthält. K_2 ist die Kreisscheibe mit Mittelpunkt $M_2\big(0, -\frac{3}{4}\big)$ und Radius $r_2 = \frac{1}{4}$. Die Gerade g: $y = -\frac{1}{4}$ zerlegt B in 3 Normalbereiche bezüglich der y-Achse:
B_1: Teil von K_1, der oberhalb von g liegt.

B_2: Teil von K_1, der unterhalb von g und links von K_2 liegt und
B_3: der Teilvon K_1, der unterhalb von g und rechts von K_2 liegt.

Es gilt: $L = \int\int_B y\ dxdy = \int\int_{B_1} y\ dxdy + \int\int_{B_2} y\ dxdy + \int\int_{B_3} y\ dxdy$.
Aus Symmetriegründen sind die Integrale über B_2 und B_3 gleich. Dann ist:

$$\begin{aligned} L &= \int_{y=-\frac{1}{2}}^{1} \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} y\ dxdy + 2\int_{y=-1}^{-\frac{1}{2}} \int_{y=\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1/16-(y+3/4)^2}} y\ dxdy \\ &= \underbrace{2\int_{-\frac{1}{2}}^{1} y\sqrt{1-y^2}\ dy}_{I_1} \underbrace{-2\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} y\sqrt{1-y^2}\ dy}_{I_2} \underbrace{+2\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} y\sqrt{\frac{1}{16}-\left(y+\frac{3}{4}\right)^2}\ dy}_{I_3} \end{aligned}$$

$I_1 = -\frac{2}{3}(1-y^2)^{3/2}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{1} = \ ...\ = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $I_2 = \frac{2}{3}(1-y^2)^{3/2}\Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}} = \ ...\ = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Da die beiden Integrale sich aufheben, verbleibt nur noch I_3. Mit der Substitution $y = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sin t$ erhalten wir:

$$I_3 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sin t\right)\frac{\cos^2 t}{16}\ dt = -\frac{3}{64}\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ dt}_{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{64}\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos^2 t\ dt}_{0} = -\frac{3\pi}{128}$$

und damit letzlich: $L = -\frac{3\pi}{64}$.

Bemerkung: Es geht auch einfacher. Nach den Rechenregeln für Mehrfachintegrale gilt:

$$\int\int_B y\ dxdy = \int\int_{K_1} y\ dxdy - \int\int_{K_2} y\ dxdy\ .$$

Während das erste Integral aus Symmetriegründen Null ist, bedeutet das zweite das "Schweremoment" der Kreisscheibe K_2 bzgl. y. Dieses ist aber gleich dem Produkt der Schwerpunktskoordinate y_S und dem Flächeninhalt von K_2. Wegen $y_S = -\frac{3}{4}$ und $A_{K_2} = \frac{\pi}{16}$ folgt dann $L = -\frac{3\pi}{64}$.

Aus: Aufgabensammlung Mathematik, S. 96

2.3 Satz von Stokes

2.3.1 Kurvenintegral 1

Aufgabe: Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$L = \int_C (x - 2y^2z)dx + (x^3 - z^2)dy + (x^2 + y^2)dz$$

Dabei ist C die Schnittkurve der beider Flächen $z_1^2 = x^2 + y^2$ und $z_2 = \frac{8}{x^2+y^2}$, die vom Urpsung aus gesehen im Uhrzeigersinn orientiert ist.

Lösung: Die beiden Flächen sind Rotationsflächen jeweils mit der z-Achse als Drehachse. Die Schnittkurve ist daher ein Kreis. Seine Projektion in die xy-Ebene erhalten wir durch Gleichsetzen der z-Werte:

$$x^2 + y^2 = \frac{64}{(x^2+y^2)^2} \ \rightarrow\ x^2 + y^2 = 4$$

Der zugehörige z-Wert ist 2. Wir verwenden den Satz von Stokes:

$$L = \int_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{x} = \int\int_B (\text{rot}\vec{v} \cdot \vec{n})\ do, \text{mit } \vec{v} = \begin{pmatrix} x - 2y^2 \\ x^3 - z^2 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Da im Satz von Stokes die linke Seite nur von der Berandung ∂B abhängt, können wir auf der rechten Seite jedes glatte Flächenstück B wählen, sofern die Berandung die gleiche bleibt. Im vorliegenden Fall wählen wir für B die Kreisscheibe $x^2 + y^2 = 4$ in der Ebene $z = 2$. Dann gilt $\vec{n} = \vec{e}_3$ und $do = dx\ dy$. Ferner gilt $\text{rot}\vec{v} = (2y + 2z, -2y^2 - 2x, 3x^2 + 4yz)^T$. Damit erhalten wir:

$$L = \int\limits_{x^2+y^2 \le 4} \big(3x^2 + 4y \underbrace{z(x,y)}_{2}\big) dx\ dy = \int\limits_{x^2+y^2 \le 4} (3x^2 + 8y) dx\ dy$$

und weiter unter Verwendung von Polarkoordinaten:

$$L = \int_{r=0}^{2} \int_{\phi=0}^{2\pi} (3r^2 \cos^2\phi + 8r \sin\phi) r\ dr d\phi = 3 \underbrace{\int_{r=0}^{2} r^3 dr}_{\frac{2^4}{4}} \underbrace{\int_{\phi=0}^{2\pi} \cos^2\phi\ d\phi}_{\pi} + 8 \underbrace{\int_{r=0}^{2} r^2\ dr}_{\frac{2^3}{3}} \underbrace{\int_{\phi=0}^{2\pi} \sin\phi\ d\phi}_{0} = 12\pi$$

Aus: Aufgabensammlung Mathematik, S.99

2.3.2 Kurvenintegral 2

Aufgabe: Berechnen Sie den Absolutbetrag des Kurvenintegrals

$$L = \int_C (x - yz) dx + (1 + z^2) dy - 2xy\ dz$$

Dabei ist C die Schnittkurve der beiden Flächen $2x^2 + y^2 = 1 + z_1^2$ und $z_2 = x$.

Lösung: Bei den Flächen handelt es sich um ein einschaliges, elliptisches Hyperboloid und um eine Ebene. Die Projektion der Schnittkurve C in die xy-Ebene folgt aus $2x^2 + y^2 = 1 + x^2$ zu $x^2 + y^2 = 1$. Wir verwenden den Satz von Stokes:

$$L = \int_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{x} = \int\int_B (\text{rot}\vec{v} \cdot \vec{n}) do, \text{mit} \vec{v} = \begin{pmatrix} x - yz \\ 1 + z^2 \\ -2xy \end{pmatrix}$$

Als B wählen wir das durch C berandete Stück der Ebene $z = x$. Dann gilt: $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T$ und $do = \sqrt{2} dx dy$. Ferner gilt $\text{rot}\vec{v} = (-2x - 2z, y, z)^T$.
Damit erhalten wir:

$$L = \int\limits_{x^2+y^2 \le 1} \big(-2x - 3 \underbrace{z(x,y)}_{x}\big) dx dy = \int\limits_{x^2+y^2 \le 1} (-5x) dx dy = 0$$

Bemerkung: Das letzte Integral ist Null, da der Integrationsbereich bezüglich x symmetrisch ist, der Integrand jedoch ungerade in x.

Aus: Aufgabensammlung Mathematik, S.100

3 Funktionentheorie

3.1 Komplexe Differenzierbarkeit & Holomorphe Funktionen

3.1.1 Komplexe Differenzierbarkeit 1

Aufgabe: Ist die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x + iy \to x^2 - y^2 - 2x + 2iy(x-1)$ komplex differenzierbar?

Lösung: Seien $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $u(x + iy) = x^2 - y^2 - 2x$ und $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $v(x + iy) = 2y(x-1)$ der Real- bzw. Imaginärteil von f.
Dann berechnen sich die partiellen Ableitungen zu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 2$$

Somit gelten für die (reell differenzierbare) Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \to u(z) + iv(z)$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und f ist auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.
Aus Repetitorium Funktionentheorie, S. 15

3.1.2 Komplexe Differenzierbarkeit im Nullpunkt

Aufgabe: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x + iy \to \sqrt{|xy|}$, $x, y \in \mathbb{R}$.
Ferner seien $u = \text{Re}f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ und $v = \text{Im}f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ der Real- bzw. Imaginärteil von f.

a) Zeigen Sie: Die Funktionen u und v sind sind im Nullpunkt partiell (reell) differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.
b) Ist die Funktion f im Nullpunkt reell differenzierbar?
c) Ist die Funktion f im Nullpunkt komplex differenzierbar?
d) Sind die Funktionen u und v (als Funktion zweier reeller Variablen) im Nullpunkt reell differenzierbar?

Lösung: a)

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(0 + h) + u(0)}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(0 + ih) + u(0)}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Analog für v.
Daraus folgt, dass alle partiellen Ableitungen existieren und den Wert 0 besitzen. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind somit im Nullpunkt erfüllt.

b) Beweis:
Annahme: Die Funktion f ist im Nullpunkt reell differenzierbar.
Das Differential im Nullpunkt berechnet sich zu:

$$J_0 = \begin{pmatrix} u_x(0) & u_y(0) \\ v_x(0) & v_y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit gilt nach Definition der reellen Differenzierbarkeit:

$$0 = \lim_{z \to 0} \frac{|f(z) - f(0) - J_0(z-0)|}{|z-0|} = \lim_{x+iy \to 0} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Insbesondere gilt für die Nullfolge $(x_n + iy_n)_n$ mit $x_n = y_n = n^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung:

$$0 = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{x_n y_n}}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{-1}}{\sqrt{2}n^{-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow$ f ist im Nullpunkt nicht reell differenzierbar.

c) Die Funktion f ist im Nullpunkt auch nicht komplex differenzierbar, da dies die reelle Differenzierbarkeit im Nullpunkt implizieren würde.

d) Die Funktion $v = \mathrm{Im} f = 0$ ist natürlich im Nullpunkt reell differenzierbar, nicht aber die Funktion $u = \mathrm{Re} f$, da dies die reelle Differnzierbarkeit von f im Nullpunkt zur Folge hätte.

Aus Repetitorium Funktionentheorie, S. 16

3.1.3 Biholomorphe Abbildung

Aufgabe: Gibt es eine biholomorphe Abbildung von $\mathbb{C}$ auf die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$?
Hinweis: Satz von Liouville

Lösung: Nein. Da $\mathbb{E}$ beschränkt ist, ist jedes holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{E}$ konstant.

Aus: Arbeitsbuch Grundwissen Mathematik, Kapitel 5

3.1.4 Gerade Funktionen

Aufgabe: Finden Sie alle geraden - das heißt $f(z) = f(-z)$ - für alle z-holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 1$, welche $f(z^2) = f^2(z)$ in $\mathbb{C}$ erfüllen.
Hinweis: Potenzreihenentwicklung

Lösung: Die einzige solche Funktion ist die Konstante $f = 1$.
Also holomorphe Funktion ist f in eine Potenzreihe entwickelbar: $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Da f gerade ist, gilt $a_k = 0$ für alle ungeraden $k \in \mathbb{N}$. Aus $f(0) = 1$ folgt $a_0 = 1$. Die Funktionalgleichung $f(z^2) = f^2(z)$ wird zu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j a_{k-j} \right) z^k.$$

Koeffizientenvergleich führt auf $a_k = \sum_{j=0}^{2k} a_j a_{2k-j}$, was wegen $a_0 = 1$ umgeschrieben werden kann zu

$$2a_{2k} = a_k - \sum_{j=1}^{2k-1} a_j a_{2k-j}.$$

Für $k = 1$ ergibt sich $a_2 = 0$ aus $a_1 = 0$. Die Rekursionsformel zeigt weiterhin, dass $a_2 = ... = a_{2k-2} = 0$ impliziert, dass $a_{2k} = 0$. Also sind alle Koeffizienten bis auf a_0 gleich null.

Aus: Arbeitsbuch Grundwissen Mathematik, Kapitel 5

3.1.5 Offenheitssatz

Aufgabe: Man zeige, dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ eine offene Abbildung ist.

Lösung: Die Funktion $f = (u, v)$ ist reell differenzierbar und erfüllt auf $\mathbb{R}^2$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.
Sie ist also holomorph (genauer: $\hat{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x + iy \to u(x, y) + iv(x, y)$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$). Die Behauptung folgt daher aus dem Offenheitssatz.
Aus Repetitorium Funktionentheorie, S. 24

3.1.6 Maximums- und Minimumsprinzip

Aufgabe: Sei U eine zusammenhängende Umgebung der abgschlossenen Einheitsscheibe $\overline{\mathbb{E}}$ und sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph.
Es existiere eine Konstante $c \geq 0$ mit $|f(z)| = c$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.
Man zeige: f ist konstant oder besitzt eine Nullstelle im Inneren von $\overline{\mathbb{E}}$.

Lösung:
1. Fall: c=0: Aus dem Identitätssatz folgt: $f(z) = 0\ \forall z \in \overline{\mathbb{E}}$.

2. Fall: $c \neq 0$: Besitze nun f keine Nullstelle im Inneren von $\overline{\mathbb{E}}$.
Nach dem Maximimumsprinzip für beschränkte Gebiete ist $|f(z)| \leq c\ \forall z \in \overline{\mathbb{E}}$.
Nach dem Minimumsprinzip für beschränkte Gebiete ist dagegen $|f(z)| \geq c\ \forall z \in \overline{\mathbb{E}}$.

Daraus folgt nun $|f(z)| = c\ \forall z \in \mathbb{E}$. Die Menge $f(\mathbb{E})$ liegt somit auf einem Kreisrand mit Radius c, ist also nicht offen in $\mathbb{C}$.

Aus dem Offenheitssatz folgt daraus die Konstanz von f auf $\mathbb{E}$ und schließlich auch auf U nach dem Identitätssatz.

Aus Repetitorium Funktionentheorie, S. 31

3.2 Residuen

3.2.1 Residuen berechnen 1

Aufgabe: a) Berechnen Sie das Residuum von $f(z) = e^z/\sin z$ in $c = 0$.
b) Berechnen Sie das Residuum von $f(z) = \frac{1+z^2}{1+e^z}$ in allen Singularitäten von f.

Lösung: a) $\mathrm{Res}(f, 0) = 1$.
Es ist

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} e^z \frac{z}{\sin z} = e^0 \cdot 1 = 1$$

also ist 0 ein einfacher Pol von f und $\mathrm{Res}(f, 0) = \lim_{z\to 0} zf(z) = 1$.

b) Nullsetzen von $h(z) = e^z + 1 = 0$ des Nenners liefert die Nullstellen $c_k = \pi i + 2k\pi i$ für $k \in \mathbb{Z}$. Diese sind einfach, da $h'(z) = e^z \neq 0$ gilt für alle $z \in \mathbb{C}$. Da der Zähler $g(z) = 1 + z^2$ holomorph und in $\mathbb{C}$ von null verschieden ist, sind alle c_k einfache Polstellen von f. Es folgt:

$$\mathrm{Res}(f, c_k) = \frac{g(c_k)}{h'(c_k)} = \frac{1 + c_k^2}{e^{c_k}} = -1 - c_k^2.$$

Aus: Arbeitsbuch Grundwissen Mathematik, Kapitel 5

3.2.2 Residuen berechnen 2

Aufgabe: a) Berechnen sie das Residuum in $c = 0$ von $f(z) = (3z^2 - 4z + 5)/z^3$.
b) Berechnen Sie das Residuum in $c = 1$ von $f(z) = (z - 1)^{-5} \log z$.

Lösung: Wir berechnen den Koeffizienten a_{-1} in der Laurentreihe von f.
a) Es ist

$$f(z) = \frac{5}{z^3} - \frac{4}{z^2} + \frac{3}{z} \;\to\; \mathrm{Res}(f, 0) = 3.$$

b) Wir setzen $w = z - 1$. Division durch w^5 verschiebt die Laurentkoeffizienten von

$$\log(1 + w) = w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \frac{w^4}{4} + \dots$$

um 5 Stellen, also gilt $\mathrm{Res}(f, 1) = -\frac{1}{4}$.

Aus: Arbeitsbuch Grundwissen Mathematik, Kapitel 5

3.2.3 Integral 1

Aufgabe: Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+z^6} dz.$$

Lösung: Das Integral hat den Wert 1/3.
Es ist

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+z^6} dz = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+z^6} dz$$

wegen Symmetrie. Der Nennergrad ist um 5 größer als der Zählergrad, daher gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = 2\pi i \sum_{c\in S^+} \operatorname{Res}(f,c)$$

wobei S^+ die in der oberen Halbebene liegenden Singularitäten von f enthält. Die Nullstellen von $z \mapsto z^6 - 1$ sind die Zahlen $c = \frac{1}{6}\pi i + \frac{k}{3}\pi i, 0 \le k < 5$. Es folgt:

$$S^+ = \left\{\frac{\pi}{6}i, \frac{\pi}{2}i, \frac{5\pi}{6}i\right\}$$

Es gilt

$$\operatorname{Res}(f,c) = \frac{1}{6c^5} = -\frac{c}{6}$$

da $c^6 = -1$. Es folgt

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+z^6}dz = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+z^6}dz = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi i}{3}\left(e^{\pi i/6} + e^{\pi i/2} + e^{5\pi i/6}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Aus: Arbeitsbuch Grundwissen Mathematik, Kapitel 5

4 Fourieranalysis

4.0.1 Umgekehrte Fouriertransformation

Aufgabe: Bestimmen Sie $f(x)$ so, dass gilt:

$$\mathcal{F}|f(x)| = \begin{cases} \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(\pi^2 - \lambda^2) \text{ für } -\pi < x < \pi \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Lösung: Es gilt:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)e^{i\lambda x}\ d\lambda = \ \ldots\ = \frac{1}{4}2\int_0^{\pi}(\pi^2-\lambda^2)\cos(\lambda x)\ d\lambda$$

, woraus durch zweimalige partielle Integration folgt:

$$f(x) = \frac{1}{2x}\Big[(\pi^2-\lambda^2)\sin(\lambda x)\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi}\lambda\sin(\lambda x)d\lambda\Big] = \frac{1}{x^2}\Big[-\lambda\cos(\lambda x)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos(\lambda x)d\lambda\Big]$$

$$= \frac{1}{x^2}\Big[-\pi\cos(\pi x) + \frac{1}{x}\sin(\lambda x)\Big|_0^{\pi}\Big].$$

Damit erhalten wir:

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x) - \pi x\cos(\pi x)}{x^3}$$

Aus: Aufgabensammlung Mathematik, S. 215

4.0.2 Inhomogene Differentialgleichung

Aufgabe: Bestimmen Sie unter Verwendung der Fourier-Transformation eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$-\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 y = g(x), \ -\infty < x < \infty.$$

Bestimmen Sie ferner für $g(x) = e^{-a|x|}$ eine explizite Darstellung der partikulären Lösung. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $x > 0$ und $x < 0$.
Hinweis: $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\lambda^2+a^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a}e^{-a|x|}$

Lösung: Fourier-Transformation der Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Linearität liefert zunächst:

$$-\mathcal{F}[y''(x)] + a^2\mathcal{F}[y(x)] = \mathcal{F}[g(x)].$$

Wegen $\mathcal{F}[y''(x)] = (i\lambda)^2\mathcal{F}[y(x)]$ folgt daraus mit den Bezeichnungen $Y(\lambda) \equiv \mathcal{F}[y(x)]$ und $G(\lambda) \equiv \mathcal{F}[g(x)]$:

$$(\lambda^2 + a^2)Y(\lambda) = G(\lambda), \text{bzw. } Y(\lambda) = \frac{G(\lambda)}{\lambda^2 + a^2}. \ (*)$$

Umkehrtransformation (unter Berücksichtigung des Hinweises und des Faltungssatzes) liefert:

$$y(x) = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{-a|x-\xi|}d\xi.$$

Mit $g(x) = e^{-a|x|}$ erhalten wir:

$$y(x) = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|\xi|}e^{-a|x-\xi|}d\xi.$$

a) $\underline{x < 0}$: Wir unterteilen den Integrationsbereich in drei Teilintervalle:

$$y(x) = \frac{1}{2a}\Big[\int_{-\infty}^{x} e^{a\xi}e^{-a(x-\xi)}d\xi + \int_{x}^{0} e^{a\xi}e^{a(x-\xi)}d\xi + \int_{0}^{\infty} e^{-a\xi}e^{a(x-\xi)}d\xi\Big]$$

$$= \frac{1}{2a}\Big[e^{-ax}\int_{-\infty}^{x} e^{2a\xi}d\xi + e^{ax}\int_{x}^{0} d\xi + e^{ax}\int_{0}^{\infty} e^{-2a\xi}d\xi\Big] =$$

$$= \frac{1}{2a}\Big[e^{-ax}\frac{1}{2a}e^{2a\xi}\big|_{-\infty}^{x} - xe^{ax} - e^{ax}\frac{1}{2a}e^{-2a\xi}\big|_{0}^{\infty}\Big] = \ ... \ = \frac{1}{2a^2}(1 + ax)e^{ax}.$$

b) $\underline{x > 0}$: Eine analoge Rechung liefert: $y(x) = \frac{1}{2a^2}(q - ax)e^{-ax}$.

Insgesamt gilt dann:

$$y(x) = \frac{1}{2a^2}(1 + a|x|)e^{-a|x|}. \ (*)$$

Bemerkung: Damit gewinnen wir ein weiteres Ergebnis. Mit $g(x) = e^{-a|x|}$ folgt:
$G(\lambda)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{a}\frac{1}{\lambda^2+a^2}$ und weiter mit (*): $Y(\lambda) = \frac{G(\lambda)}{\lambda^2+a^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{a}\frac{1}{(\lambda^2+a^2)^2}$.
Rücktransformation liefert: $y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{a}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(\lambda^2+a^2)^2}\right]$.
Vergleich mit (**) ergibt dann:

$$\mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{1}{(\lambda^2+a^2)^2}\Big] = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2a}(1+a|x|)e^{-a|x|}.$$

Aus: Aufgabensammlung Mathematik, S.216

4.0.3 Integral

Aufgabe: Berechnen Sie - unter Verwendung der Fourier-Transformation - das folgende Integral:

$$I(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}.$$

Hinweis: $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2} \;\to\; F(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a}e^{-a|\lambda|}$

Lösung: Nach dem Faltungssatz gilt:

$$(f*g)(x) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}[F(\lambda)G(\lambda)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)G(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda.$$

Speziell für $x=0$ folgt daraus die Formel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(-\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)G(\lambda)d\lambda.$$

Mit $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$ und $g(x) = \frac{1}{x^2+b^2}$ folgt wegen $F(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a}e^{-a|\lambda|}$ und $G(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{b}e^{-b|\lambda|}$ (Hinweis) folgt nach obiger Formel:

$$I(a,b) = \frac{\pi}{2ab}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+b)|\lambda|}d\lambda = \frac{\pi}{ab}\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-(a+b)\lambda}d\lambda}_{\frac{1}{a+b}} = \frac{\pi}{ab(a+b)}.$$

Aus: Aufgabensammlung Mathematik, S.218

5 Hilberträume & Operatoren

5.0.1 Skalarprodukt

Aufgabe: Zeigen Sie, dass zu quadratischen Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ durch $(A,B) = \mathrm{tr}(AB^*)$ ein Skalarprodukt definiert ist.

Lösung: Aus

$$\mathrm{tr}(AB^*) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{b}_{ij}$$

ergeben sich direkt die Eigenschaften eines Skalarprodukts. Offensichtlich gilt:

$$\mathrm{tr}(\lambda A, B^*) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda a_{ij}\bar{b}_{ij} = \lambda\mathrm{tr}(A, B^*)$$

$$\mathrm{tr}((\lambda A + C), B^*) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (\lambda a_{ij} + c_{ij})\bar{b}_{ij} = \lambda\mathrm{tr}(A, B^*) + \mathrm{tr}(C, B^*)$$

für $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Weiterhin erhalten wir:

$$\operatorname{tr}(A, B^*) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{b}_{ij} = \overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} b_{ij}} = \overline{\operatorname{tr}(B, A^*)}$$

$$\operatorname{tr}(A, A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \geq 0.$$

Schließlich ist $\operatorname{tr}(A, A) = 0$ äquivalent zu $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = 0 \to A = 0$.
Somit haben wir die Eigenschaften eines Skalarprodukts überprüft.

Aus: Arbeitsbuch Grundwissen Mathematik, Seite 76

5.0.2 Cauchy-Schwarz Ungleichung im $\mathbb{C}$

Aufgabe: Beweisen Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für alle $z, w \in \mathbb{C}$:

$$|\langle z, w\rangle| \leq |z| \cdot |w|$$

Lösung: Seien $z = x + iy$ und $w = u + iv$ komplexe Zahlen mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$|\langle z, w\rangle|^2 = (x \cdot u + y \cdot v)^2 = x^2u^2 + y^2v^2 + 2xyuv$$

und

$$|z|^2 \cdot |w|^2 = (x^2 + y^2) \cdot (u^2 \cdot v^2) = x^2u^2 + y^2v^2 + x^2v^2 + y^2u^2$$

Aus

$$(xv - yu)^2 \geq 0 \to x^2v^2 + y^2u^2 \geq 2xyuv$$

erhält man:

$$|\langle z, w\rangle|^2 \leq |z|^2 \cdot |w|^2$$

Und damit aufgrund der strengen Monotonie der Wurzelfunktion auf $\mathbb{R}_0^+$ die zu zeigende Ungleichung.
Aus Repetitorium Funktionentheorie, S. 104

5.0.3 Eigenwerte & -Funktionen

Aufgabe: Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Operatoren A_1, A_2, $A_1 + A_2 : L^2(0,1) \to L_2^{0,1}$ mit:

$$A_1 \cdot x(t) = \int_0^1 \min(t,s)\ x(s)ds,$$
$$A_2 \cdot x(t) = \int_0^1 \max(t,s)\ x(s)ds.$$

Lösung: Offensichtlich sind die Operatoren selbstadjungiert und es gilt:

$$A_1 \cdot x(t) = \int_0^t s\ x(s)ds + \int_t^1 t\ x(s)ds$$
$$A_2 \cdot x(t) = \int_0^t t\ x(s)ds + \int_t^1 s\ x(s)ds$$
$$B \cdot x(t) = A_1 + A_2 = \int_0^1 (t+s)\ x(s)ds$$

i) Sei λ Eigenwert mit Eigenfunktion x zu A_1, d.h. es gilt $A_1 x = \lambda x$. Dann ist $x \in C^2(0,1)$ mit

$$\lambda x'(t) = \int_t^1 x(s)ds \text{ und } \lambda x''(t) = -x(t).$$

Außerdem gilt $X(0) = x'(1) = 0$.
Aus $\lambda x'' = -x$ folgt sofort, dass $\lambda = 0$ kein Eigenwert ist.
1. Fall - $\lambda \leq 0$: Setze $\omega = \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}$. Dann ist die allgemeine Lsg. der DGL durch

$$x(t) = \alpha e^{\omega t} + \beta e^{-\omega t}$$

gegeben. Aus den Randbedingungen folgt aber $\alpha = \beta = 0$. Also ist $\lambda \leq 0$ kein EW.

2. Fall - $\lambda \geq 0$: In diesem Fall ist $x(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$ die allg. Lösung, wenn $\omega = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ ist. Aus $x(0) = 0$ folgt $\alpha = 0$ und $x'(1) = 0$ impliziert $\beta = 0$ oder $\cos(\omega) = 0$. Also ist $\lambda \geq 0$ genau dann EW, wenn $\omega = (n - \frac{1}{2})\pi, n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir erhalten alle EW

$$\lambda_n = \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}, n \in \mathbb{N}$$

mit den normierten Eigenfunktionen $x_n(t) = \sqrt{2}\sin(\omega_n t)$.

ii) Analog erhalten wir für einen EIgenwert λ mit EF x zu A_2, d.h. $A_2 x = \lambda x$, dass $x \in C^2(0,1)$ ist mit

$$\lambda x'(t) = \int_0^t x(s)ds \text{ und } \lambda x''(t) = x(t)$$

Außerdem gelten die Randbedingungen $x'(0) = 0$ und $x(1) = x'(1)$.
Wiederum ist $\lambda = 0$ offensichtlich kein Eigenwert.

1. Fall - $\lambda > 0$: Mit $\omega = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ ist die allgemeine Lösung der DGL:

$$x(t) = \alpha e^{\omega t} + \beta e^{-\omega t}.$$

Aus den Randbedingungen folgt $\alpha = \beta$ und $f(\omega) \equiv \omega \tanh \omega = 1$. Da $f(0) = 0$, $\lim_{\omega \to \infty} f(\omega) = \infty$ und $f'(\omega) > 0$ für $\omega > 0$ ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz und der Monotonie, dass es genau einen positiven Eigenwert zu A_2 gibt.

2. Fall - $\lambda < 0$: In diesem Fall ist mit $\omega = \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}$ durch $x(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$ die allg. Lösung gegeben. Aus den Randbedingungen erhalten wir $\beta = 0$ und die Fixpunktgleichung $\omega = -\cot(\omega)$. Diese Gleichung besitzt abzählbar unendlich viele Lösungen mit $\omega_n \in [(n-1)\pi, n\pi], n \in \mathbb{N}$.
Also ergeben sich abzählbar unendlich viele negative EW $\lambda = -\omega_n^2$ mit Eigenfunktionen $x_n(t) = \alpha \cos(\omega_n t)$.

iii) Für die Summe $L = A_1 + A_2$ erhalten wir, wenn λ Eigenwert mit Eigenfunktion x zu L ist, dass $x \in C^2(0,1)$ gilt mit

$$\lambda x'(t) = \int_0^1 x(s)ds \text{ und } \lambda x''(t) = 0.$$

Außerdem gelten die Anfangsbedingungen $\lambda x(0) = \int_0^1 sx(s)ds$ und $\lambda x'(0) = \int_0^1 x(s)ds$.
Offensichtlich ist wieder $\lambda = 0$ kein Eigenwert. Die allg. Lösung der DGL ist $x(t) = \alpha t + \beta$ und aus den Randbedingungen ergibt sich die quadratische Gleichung

$$\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 = \frac{1}{3}$$

mit den beiden Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Also erhalten wir genau einen positiven und einen negativen Eigenwert.
Aus: Arbeitsbuch Grundwissen Mathematik, S.76

5.0.4 Kompakte Operatoren

Aufgabe: Es sei $A \in \mathcal{L}(X,X)$ ein linearer, beschränkter Operator in einem Hilbertraum X. Zeigen Sie, dass A genau dann kompakt ist, wenn A^*A kompakt ist.
Hinweis: Aus der Konvergenz einer Folge (A^*Ax_n) kann man zeigen, dass Ax_n Cauchy-Folge ist.

Lösung: Die eine Richtung der Äquivalenz ist leicht zu sehen, denn mit $A \in \mathcal{L}(X,X)$ in Hilbertraum ist auch $A^* \in \mathcal{L}(X,X)$. Damit ist die Verkettung A^*A kompakt, wenn einer der Operatoren A oder A^* kompakt ist.

Nehmen wir nun andererseits an, dass A^*A kompakt ist und betrachten eine beschränkte Folge (x_n) in X mit $\| x_n \| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine konvergente Teilfolge zu A^*Ax_n. Ohne die Notation zu modifizieren, nehmen wir an, dass (A^*Ax_n) diese Teilfolge ist. Für die Differenz $\| Ax_n - Ax_k \|$ mit $n, k \in \mathbb{N}$ erhalten wir mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned} &\| Ax_n - Ax_k \|^2 = (x_n - x_k, A^*A(x_n - x_k)) \\ \leq &\| x_n - x_k \| \| A^*A(x_n - x_k) \| \leq 2c \| A^*A(x_n - x_k) \| \to 0, \ n, k \to \infty. \end{aligned}$$

Somit ist (Ax_n) eine Cauchy-Folge in X und deswegen konvergent. Insgesamt haben wir gezeigt, dass zu jeder beschränkten Folge die Bildfolge (Ax_n) eine konvergente Teilfolge besitzt, d.h. der Operator A ist kompakt.
Aus: Arbeitsbuch Grundwissen Mathematik, S.77

6 Anmerkungen

- Die Aufteilung des Dokuments ist am Skript von Prof. Wolf aus dem WS 18/19 orientiert.

mybib